Il criterio di Cauchy per la convergenza delle successioni

20 ottobre 2011

Lo scopo di questi appunti è la dimostrazione del seguente teorema

Teorema 1 . *Una successione x_n di numeri reali è convergente ad un numero reale ℓ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero positivo N_ε tale che la disuguaglianza*

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

si verifichi per tutti gli indici $n, m > N_\varepsilon$.

E' molto facile dimostrare che se la successione x_n è convergente allora soddisfa alla condizione enunciata nel Teorema 1. Infatti se $\lim_n x_n = \ell$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero positivo N_ε tale che quanto l'indice n supera N_ε risulta $|x_n - \ell| < \varepsilon/2$. La disuguaglianza triangolare per il valore assoluto ci permette allora di dire che se $m, n > N_\varepsilon$, allora

$$|x_n - x_m| = |(x_n - \ell) - (x_m - \ell)| \leq |x_n - \ell| + |x_m - \ell| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Più difficile è invece dimostare che se x_n è una successione che soddisfa alla condizione indicata nel Teorema 1, allora x_n è convergente. Cominciamo con dare un nome alla condizione indicata nel Teorema1.

Definizione 1 . *Si dice che una successione x_n di numeri reali soddisfa alla condizione di Cauchy o in breve che è una successione di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero positivo N_ε tale che, per tutti gli indici $n, m > N_\varepsilon$ risulti*

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

.

Un modo equivalente per esprimere la condizione $|x_n - x_m| < \varepsilon$ per $n, m > N_\varepsilon$ è quello di richiedere che per tutti i numeri interi positivi p e per tutti gli indici n maggiori di N_ε risulti

$$|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon.$$

Ci sono due proprietà importanti delle successioni di Cauchy che sono enunciate nei seguenti due lemmi.

Lemma 1 *Una successione di Cauchy è limitata.*

DIMOSTRAZIONE. Per definizione esiste un intero positivo N tale che se $n, m > N$, risulta $|x_n - x_m| < 1$. In particolare se $m > N$, deve essere $|x_{N+1} - x_m| < 1$. Ne segue che se $m > N$, allora $|x_m| \leq 1 + |x_{N+1}|$. Questo ci porta a concludere che il numero

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots |x_N|, 1 + |x_{N+1}|\},$$

è un maggiorante per tutti gli $|x_n|$.

Lemma 2 . *Se una successione di Cauchy ammette una sottosuccessione convergente ad un limite ℓ allora anche la successione di partenza converge allo stesso limite.*

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che una sottosuccessione x_{n_k} di una successione x_n, è una funzione definita sui numeri interi positivi, $k \mapsto x_{n_k}$, ottenuta componendo una funzione strettamente crescente $k \mapsto n_k$ definita e a valori sugli interi positivi con la funzione $n \mapsto x_n$ che definisce la successione di partenza. In pratica è sufficiente scegliere un sottoinsieme infinito di indici (che essendo bene ordinato può essere espresso attraverso una successione crescente n_k a valori negli interi positivi) e determinare i corrispondenti elementi x_{n_k}. Supponiamo ora che x_n sia una successione di Cauchy e x_{n_k} una sua sottosuccessione convergente al limite ℓ. In simboli $\lim_k x_{n_k} = \ell$. Vogliamo mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero positivo N tale che quando $n > N$ si verifichi $|x_n - \ell| < \varepsilon$. Supponiamo quindi che sia assegnato il numero positivo ε. Sappiamo che esiste un intero positivo K tale che quando $k > K$ risulta $|x_{n_k} - \ell| < \varepsilon/2$. Esiste anche un intero positivo N tale che per $n, m < N$ vale la disuguaglianza $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$. Supponiamo allora che $n > N$ e scegliamo k in modo tale che $k > K$ ed anche $n_k > N$ (cosa possibile perché n_k è strettamente crescente.) Ne segue che

$$|x_n - \ell| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - \ell| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - \ell| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Naturalmente per queste disuguaglianze abbiamo utilizzato il fatto che gli indici n ed n_k sono stati scelti maggiori di N.

Dimostriamo ora un teorema importante che assieme ai precedenti lemmi ci porterà a concludere che ogni successione di Cauchy è convergente.

Teorema 2 *Ogni successione limitata ammette una sottosuccessione convergente.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che la successione x_n sia limitata. Questo significa che esiste un numero positivo M tale che $|x_n| \leq M$. In altre parole i termini della successione x_n appartengono tutti ad un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ (possiamo infatti, se non altro, porre $a = -M$ e $b = M$). Costruiamo ora una successione di intervalli incapsulati $I_n = [a_n, b_n]$, con la proprietà che per ogni nl'intervallo I_n contiene termini della successione x_n per infiniti valori dell'indice n. Poniamo inizialmente $a = a_1$ e $b = b_1$, e $I_1 = [a_1, b_1]$. Dividiamo ora I_1 in due sottointervalli $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ e $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$. Almeno uno di questi due intervalli conterrà termini della successione x_n per infiniti valori dell'indice n. Scegliamo quindi come I_2 quello dei due intervalli che contiene termini della successione x_n, per un insieme infinito di indici. Se ambedue gli intervalli contengono termini della successione per infiniti indici, scegliamo come I_2 l'intervallo più a destra. Ripetiamo la stessa costruzione a partire da I_2 per ottenere I_3, e così via. In generale supponendo di aver definito i primi k intervalli incapsulati in modo che ognuno di essi sia la metà del precedente e che ognuno di essi contenga termini della successione x_n per un insieme infinito di indici, per definire I_{k+1} dividiamo $I_k = [a_k, b_k]$ nei due intervalli $[a_k, \frac{a_k+b_k}{2}]$ e $[\frac{a_k+b_k}{2}, b_k]$ e scegliamo come I_{k+1} quello tra questi due intervalli che contiene termini della successione x_n per infiniti indici, e se ambedue contengono terminiper infiniti indici, quello più a destra. In tal modo abbiamo una successione di intervalli incapsulati $I_k = [a_k, b_k]$, ognuno dei quali contiene termini della successione x_n per una quantità infinita di indici, ed ha lunghezza che è la metà della lunghezza del precedente intervallo, il che implica che la lunghezza di I_k è $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^{k-1}}$. Costruiamo ora la sottosuccessione convergentex_{n_k} come segue. Scegliamo $n_1 = 1$, scegliamo poi $n_2 > 1$ in modo tale che x_{n_2} appartenga ad I_2. Supponendo di aver scelto $n_1 < n_2 < \ldots n_k$, con la proprietà che $x_{n_k} \in I_k$, scegliamo $n_{k+1} > n_k$ in modo tale che $x_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$. Questo è sempre possibile perché I_{k+1} contiene termini della successione x_n per infiniti indici e quindi contiene termini di indice arbitrariamente grande. Osserviamo ora che

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k.$$

Osserviamo anche che le successioni a_k e b_k convergono (a_k è una successione crescente limitata superiormente, mentre b_k è una successione decrescente limitata inferiormente). Esse convergono allo stesso limite perché $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^{k-1}}$ (se i limiti fossero diversi la loro distanza dovrebbe essere minore di $\frac{b-a}{2^{k-1}}$ per ogni k). Per il "teorema dei carabinieri" anche x_{n_k} converge allo stesso limite. Abbiamo così concluso la dimostrazione del teorema.

Corollario 3 *Se x_n è una successione di Cauchy allora x_n è convergente.*

DIMOSTRAZIONE.Dal Lemma 1 si deduce che x_n è limitata. Ne segue, per il Teorema 1, che ammette una sottosuccessione x_{n_k} convergente. Segue quindi dal Lemma 2 che x_n è convergente.

Esercizio 1 *. Supponiamo che la successione x_n assuma un numero finito di valori dimostrare che se x_{n_k} è una sottosuccessione convergente allora esiste un intero positivo K tale che x_{n_k} è costante per $k > K$.*

Esercizio 2 *. Applicare gli argomenti della dimostrazione del Teorema 1 alla successione $x_n = \cos(n\pi/4)$, partendo dall'intervallo $I_1 = [-1, 1]$ e trovare la corrispondente sottosuccessione convergente x_{n_k}.*