Domande teoriche possibili per l'orale

Nota 1 *Per superare l'esame bisognerà dimostrare di saper svolgere gli esercizi proposti negli esoneri e nel compito scritto. E' quindi molto probabile che le domande di esame consisteranno in problemi uguali o analoghi a quelli cui il candidato non ha dato adeguata risposta nello scritto o negli esoneri. Chi desidera un voto alto dovrà tuttavia dimostrare una comprensione adeguata dei fondamenti teorici dell'analisi matematica. Qui di seguito sono riportate possibili domande "teoriche" che potrebbero essere fatte per accertare appunto la comprensione dei fondamenti dell'analisi matematica. Le domande che riportano alla fine tre asterischi *** sono decisamente più difficili.*

1. Ogni intervallo aperto di numeri reali contiene un numero razionale. Perché?

2. Ogni intervallo aperto di numeri reali contiene un numero irrazionale. Perché?

3. Se A e B sono sottoinsiemi limitati di numeri reali, e
$$A + B = \{a + b : a \in A, \quad b \in B\},$$
allora $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$. Perché?

4. Una successione non decrescente e limitata è convergente. A che cosa? Perché?

5. Se la successione a_n è limitata e la successione b_n converge a zero, allora la successione $c_n = a_n b_n$ converge a zero. Perché?

6. Se la successione a_n è limitata e la successione b_n è convergente ad un numero diverso da zero, allora la successione $c_n = a_n b_n$ potrebbe non convergere. Ad esempio ?

7. Una successione di Cauchy è limitata. Perché?

8. Se a_n è una successione limitata allora a_n ammette una sottosuccessione convergente. Perché?

9. Mostrare che una serie assolutamente convergente converge, ma che esistono serie convergenti che non sono assolutamente convergenti.

10. Se $\lim_{x\to a} f(x) = \ell > 0$ allora esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > 0$ per tutti gli x che distano da a meno di δ. Spiegare bene perché.

11. Se f è una funzione continua definita in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e supponiamo che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ allora, detto,

$$\lambda = \sup\{x \in [a, b] : f(x) < 0\},$$

risulta $f(\lambda) = 0$. Spiegare bene perché. Vale lo stesso risultato se f è definita nell'unione di due intervalli disgiunti? Discutere l'esempio della funzione $f(x) = x/|x|$ definita nell'insieme $[-1, 0) \cup (0, 1]$.

12. Dimostrare che se f è una funzione polinomiale di grado dispari allora esiste almeno un punto $p \in \mathbb{R}$ tale che $f(p) = 0$. Mostrare che una funzione polinomiale di grado pari potrebbe non annullarsi mai, ma che se una funzione polinomiale di grado pari (diverso da zero) assume almeno un valore negativo, allora la funzione si annulla in almeno due punti distinti.

13. Se f è una funzione continua definita in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ allora f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ ed $f(b)$. Spiegare bene perché.

14. Se f è una funzione continua definita in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ allora f è limitata. Perché? E se la funzione non fosse continua? E se fosse definita in un intervallo semiaperto $(a, b]$?.

15. Se f è una funzione continua definita in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ allora esistono punti x_M e x_m appartenenti ad $[a, b]$ tali che, per ogni $x \in [a, b]$ risulta

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M).$$

Spiegare bene perché. Discutere il caso in cui f non è continua ed il caso in cui è continua, ma è definita in un intervallo semiaperto $(a, b]$.

16. Una funzione continua definita in un intervallo chiuso e limitato assume tutti i valori compresi tra il suo massimo ed il suo minimo. Perché?

17. Se f è una funzione continua definita in un intervallo $[a, b]$, allora l'immagine $f([a, b])$ è un intervallo chiuso e limitato.

18. Come si dimpstra che se x è un numero reale positivo allora esiste un numero reale positivo y tale che $y^2 = x$? In altre parole come possiamo essere sicuri che esista la radice quadrata di un numero reale positivo?

19. Come si dimostra che se x è un numero reale positivo, ed n un intero positivo, esiste un numero reale y tale che $y^n = x$?

20. Perché siamo sicuri che per ogni numero reale y esista un numero $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ tale che $\tan x = y$?

21. Trovare una funzione iniettiva definita in un intervallo la cui immagine non è un intervallo. (Ad esempio si può definire nell'intervallo $[0, 1]$, $f(x) = x$ se x è razionale e $f(x) = x + 1$, se x è irrazionale.)

22. Se f è una funzione definita in un intervallo che è derivabile in un punto interno, allora f è continua nello stesso punto. Perché?

23. Dare un esempio di una funzione continua definita in un intervallo che non è derivabile in ogni punto dell'intervallo.

24. Dare un esempio di una funzione derivabile in ogni punto interno di un intervallo, ma che non è continua in tutti i punti interni dell'intervallo.

25. Se una funzione è derivabile in tutti i punti interni dell'intervallo $[a, b]$ e $f(a) = f(b)$, allora esiste un punto interno c tale che $f'(c) = 0$. Perché? E se la funzione non fosse derivabile in tutti i punti? (Considerare ad esempio la funzione $f(x) = 1 - |x|$ nell'intervallo $[-1, 1]$.)

26. Se f è una funzione derivabile in tutti i punti interni dell'intervallo $[a, b]$ allora esiste un punto interno c tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Perché?

27. Mostrare che se f è una funzione derivabile in un intervallo e la derivata è sempre positiva, allora la funzione è crescente nel medesimo intervallo.

28. Definire che cosa si intende per funzione lipschitziana e dimostrare che una funzione lipschitziana è continua. Dare esempi di funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato che non sono lipschitziane.

29. Definire che cosa si intende per funzione uniformemente continua in un intervallo (anche illimitato) e mostrare che se una funzione è lipschitziana allora è anche uniformemente continua.

30. Dare esempi di funzioni uniformemente continue che non sono lipschitziane.***

31. Dimostrare che una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato è uniformemente continua. ***

32. Mostrare che la funzione $f(x) = \sin x^2$ è continua in $\mathbb{R}$ ma non uniformemente continua. ***

33. Mostrare che la funzione $f(x) = \sin(1/x)$ è continua nell'intervallo $(0, 1)$, ma non è uniformemente continua ***

34. Mostrare che una funzione crescente definita in un intervallo chiuso e imitato $[a, b]$ è integrabile sul medesimo intervallo.

35. Mostrare che una funzione continua in $[a, b]$ è integrabile sullo stesso intervallo (utilizzare la uniforme continuità della funzione).

36. Mostrare che esiste una funzione crescente nell'intervallo $[0, 1]$ che è discontinua su tutti i numeri razionali. Questa funzione è integrabile!! ***

37. Mostrare che se f è continua in $[a, b]$, esiste un punto c interno all'intervallo tale che
$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \quad dx.$$

38. Mostrare che la funzione
$$L(x) = \int_1^x \frac{1}{t} \quad dt,$$
definita per tutti gli x positivi verifica $L(xy) = L(x) + L(y)$.

39. Dimostrare che la funzione $L(x)$ definita sopra verifica
$$\lim_{n\to\infty} L((1 + \frac{1}{n})^n) = 1.$$

40. Mostrare che la serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha},$$
converge se e solo se $\alpha > 1$