Appunti sulle equazioni differenziali lineari del primo ordine

10 maggio 2010

Che cosa è una "equazione differenziale"? Non è molto utile darne una definizione precisa e generale. Cominciamo quindi da un caso particolare che è quello delle equazioni lineari cosiddette del primo ordine. Supponiamo che $a(x)$ e $b(x)$ siano funzioni continue definite nello stesso intervallo I (anche infinito) della retta reale. L'equazione

$$y' + a(x)y = b(x), \tag{1}$$

si chiama equazione differenziale lineare del primo ordine. Essa corrisponde al problema di trovare le funzioni $y(x)$ definite su I e derivabili, tali che, per tutti gli $x \in I$, risulti appunto $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$.

Aggiungiamo un po' di terminologia. Se $b(x) = 0$ per tutti gli x, l'equazione si dice *omogenea*. Se le funzioni $a(x)$ e $b(x)$ sono costanti, l'equazione si dice *a coefficienti costanti*. Possiamo, a questo punto partire dal caso più semplice, quello di una *equazione differenziale lineare del primo ordine omogenea e a coefficienti costanti*. In altre parole possiamo, per un elemento $a \in \mathbb{R}$ considerare l'equazione

$$y' + ay = 0 \tag{2}$$

Quali e quante funzioni $y(x)$ soddisfano a questa equazione? Osserviamo che la funzione e^{ax} non si annulla mai. Pertanto se una funzione y soddisfa alla (2), resterà vero che

$$e^{ax}(y' + ay) = 0$$

Viceversa se y soddisfa a quest'ultima equazione soddisferà anche alla (2). Osserviamo a questo punto che

$$e^{ax}(y' + ay) = (e^{ax}y)'.$$

Pertanto la funzione y soddisferà la (2) se e solo se

$$[e^{ax}y(x)]' = 0.$$

In altre parole se e solo se è costante la funzione $e^{ax}y(x)$. Le soluzioni della (2) sono quindi tutte e sole le funzioni $y(x)$ che soddisfano alla condizione $e^{ax}y(x) = k$ dove k è una costante reale. Ecco quindi la "formula risolutiva" dell'equazione (2):

$$y(x) = ke^{-ax}.$$

Vale la pena di verificare quello che abbiamo appena trovato:

$$(ke^{-ax})' + ake^{-ax} = -ake^{-ax} + ake^{-ax} = 0.$$

Proviamo ora se il metodo che abbiamo sperimentato può essere adattato ad una equazione più generale. Prendiamo cioè in considerazione una equasione differenziale del primo ordine omogenea, ma non necessariamente a coefficienti costanti. L'equazione cioè:

$$y' + a(x)y = 0, \tag{3}$$

dove $a(x)$ è una funzione continua definita in un intervallo I. Siamo naturalmente alla ricerca di funzioni derivabili $y(x)$ definite sullo stesso intervallo I. Andiamo alla ricerca prima di tutto di una primitiva di $a(x)$, cioè di una funzione $A(x)$ tale che $A'(x) = a(x)$. Osserviamo ancora che la funzione $e^{A(x)}$ non si annulla mai quindi una funzione $y(x)$ soddisferà la (3) se e solo se soddisfa

$$e^{A(x)}(y' + a(x)y) = e^{A(x)}y' + a(x)e^{A(x)}y = 0.$$

Cioè se soddisfa

$$(e^{A(x)}y(x))' = 0$$

Siamo quindi condotti ad affermare che le soluzioni della (3) sono tutte e sole le funzioni $y(x)$ per le quali $e^{A(x)}y(x)$ risulta costante nell'intervallo di definizione della $a(x)$. Arriviamo quindi anche in questo caso alla formula risolutiva della (3) che è:

$$y(x) = ke^{-A(x)},$$

dove k è una costante arbitraria e $A'(x) = a(x)$, ovvero utilizzando la notazione per gli integrali indefiniti:

$$y(x) = ke^{-\int a(t)dt},$$

dove ancora una volta k è una costante arbitraria.

Possiamo ora applicare gli stessi metodi per risolvere l'equazione generale (1)? Proviamo. Cerchiamo innanzitutto come prima una primitiva di $a(x)$, che chiamiamo $A(x)$. Osserviamo che le soluzioni di (1) sono anche soluzioni di

$$e^{A(x)}(y' + a(x)y) = e^{A(x)}b(x).$$

In altre parole sono soluzioni di

$$(e^A(x)y)' = e^{A(x)}b(x).$$

Questo significa che se x_0 è un punto dell'intervallo di definizione di $a(x)$ e $b(x)$, allora

$$\int_{x_0}^{x} (e^{A(t)}y(t))'dt = \int_{x_0}^{x} e^{A(t)}b(t)dt.$$

Cioè

$$e^{A(x)}y(x) - e^{A(x_0)}y(x_0) = \int_{x_0}^{x} e^{A(t)}b(t)dt,$$

che ci fornisce

$$y(x) = e^{-(A(x)-A(x_0))}y(x_0) + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{A(t)}b(t)dt.$$

Possiamo riscrivere questa formula risolutiva come:

$$y(x) = ke^{-A(x)} + e^{-A(x)}B(x), \tag{4}$$

dove k è una costante arbitraria e $B(x)$ è una qualsiasi primitiva della funzione $e^{A(x)}b(x)$.

Prima di concludere questi appunti sono opportune alcune osservazioni sulla "linearità" dell'equazione (1), e sulla formula risolutiva (4). Lo spazio di tutte le funzioni derivabili nell'intervallo I (l'intervallo di definizione di $a(x)$ e $b(x)$), è uno spazio lineare, cioè è chiuso rispetto alla somma e alla moltiplicazione per costanti. Possiamo definire su questo spazio un operatore L che trasforma una funzione $y(x)$ nella funzione $L(y)(x) = y'(x) + a(x)y(x)$. Questo operatore è lineare nel senso che $L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1L(y_1) + c_2L(y_2)$. La ricerca delle soluzioni dell'equazione (1) si può definire come la ricerca delle soluzioni dell'equazione

$$L(y) = b. \tag{5}$$

Supponiamo che si sia trovata una soluzione particolare, che chiamiamo y^*. Se y è una soluzione dell'equazione "omogenea"

$$L(y) = 0,$$

allora $y + y^*$ sarà una soluzione della (5). Viceversa poiché se y^{**} è un'altra soluzione della (5) la differenza $y^* - y^{**}$ è una soluzione della equazione omogenea, possiamo dire che tutte le soluzioni della (5) sono somma di y^* e di una soluzione dell'equazione omogenea.

Come si rilfettono queste considerazioni sulla formula risolutiva? Osserviamo che al variare della costante k l'espressione $ke^{-Ax)}$ ci fornisce tutte le soluzioni dell'equazione omogenea (3), mentre, se $B(x)$ è una primitiva della funzione $e^{A(x)}b(x)$, la funzione $y^\star = e^{-A(x)}B(x)$ è certamente una soluzione particolare della (1).

Esercizio 1 *Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni:*

$$y' - 2y = 1,$$

$$y' + y = e^x,$$
$$y' - 2y = x^2 + x,$$
$$3y' + y = 2e^{-x},$$
$$y' + 3y = e^{ix},$$

Esercizio 2 *Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni:*

$$y' + 2xy = x,$$

$$xy' + y = 3x^3 - 1, \quad x > 0,$$
$$y' + e^x y = 3e^x,$$
$$y' - (\tan x)y = e^{\sin x} \quad 0 < x < \pi/2.$$
$$y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

Esercizio 3 *Consideriamo l'equazione*

$$y' + a(x)y = 0, \tag{6}$$

dove $a(x)$ è una funzione continua in un intervallo I. Si osservi che la funzione identicamente nulla è una soluzione della (6). Dimostrare che se $y(x)$ è una soluzione della (6) che si annulla in un punto $x_0 \in I$, cioè $y(x_0) = 0$, allora $y(x)$ è identicamente nulla. Dimostrare che se $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ sono due soluzioni della (6) che hanno lo stesso valore in un punto $x_0 \in I$, cioè $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$, allora le due soluzioni coincidono su tutto I. Dimostrare che due soluzioni della (6) sono necessariamente una un multiplo dell'altra, cioè sono linearmente dipendenti.

Esercizio 4 EQUAZIONE DI BERNOULLI

L'equazione differenziale

$$y' + \alpha(x)y = \beta(x)y^k,$$

si chiama EQUAZIONE DI BERNOULLI. *Osservare che la sostituzione* $z = y^{1-k}$ *trasforma l'equazione di Bernoulli in una equasione lineare del primo ordine:*

$$z' + (1-k)\alpha(x)z = (1-k)\beta(x)$$

Trovare tutte le soluzioni dell'equazione

$$y' - 2xy = xy^2$$