

Appunti sulle equazioni differenziali lineari del secondo ordine

10 maggio 2010

Dopo aver trattato delle equazioni differenziali lineari del primo ordine (cioè quelle in cui interviene la sola derivata prima delle funzioni da trovare), dovremmo trattare delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine, cioè delle equazioni del tipo

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = b(x), \quad (1)$$

dove $a_1(x)$, $a_2(x)$ e $b(x)$ sono funzioni continue definite nello stesso intervallo reale.

Ci sono in effetti molte considerazioni e osservazioni che abbiamo fatto sulle equazioni del primo ordine che possono essere estese alle equazioni differenziali del secondo ordine. Prima di tutto possiamo anche in questo caso introdurre l'operatore

$$L(y)(x) = y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x),$$

ed osservare che si tratta di un operatore lineare, cioè che

$$L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1L(y_1) + c_2L(y_2).$$

Questo ci dice che lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea

$$L(y) = 0$$

è uno spazio lineare, e ci consente di affermare che tutte le soluzioni della (1) possono essere ottenute sommando ad una soluzione particolare y^* della (1) tutte le possibili soluzioni dell'equazione omogenea $Ly = 0$. Tuttavia in questo caso non abbiamo "formule risolutive" che ci consentano di descrivere esplicitamente le soluzioni della (1) o anche della sola equazione omogenea.

Per arrivare a risultati concreti conviene allora supporre innanzitutto che le funzioni $a_1(x)$ e $a_2(x)$ siano costanti. Con questa ipotesi consideriamo l'equazione omogenea che si scrive

$$L(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \quad (2)$$

Osserviamo che se λ è un numero reale (per ora) e $e_\lambda(x) = e^{\lambda x}$, allora

$$L(e_\lambda) = \lambda^2 e_\lambda + a_1 \lambda e_\lambda + a_2 e_\lambda = (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) e_\lambda.$$

Questo significa che e_λ soddisfa alla equazione omogenea $L(e_\lambda) = 0$ se e solo se $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$. Siamo quindi ricondotti alla ricerca delle radici del polinomio (in λ)

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2.$$

Il polinomio $p(\lambda)$ si chiama *polinomio caratteristico* della equazione (2), ovvero dell'operatore L . Se questo polinomio ha due radici reali distinte λ_1 e λ_2 , cioè se

$$a_1^2 - 4a_2 > 0,$$

allora le funzioni $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$ sono due soluzioni distinte della (2). Così pure saranno soluzioni della (2) tutte le combinazioni lineari

$$c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Abbiamo trovato, almeno in questo caso, tutte le soluzioni della (2)? La risposta è sì, ma non ne abbiamo dato ancora una dimostrazione.

Preoccupiamoci invece del caso in cui il polinomio $p(\lambda)$ non possiede due radici reali distinte. Cosa può succedere? Prima di tutto può succedere che ci sia una sola radice reale, λ_1 e cioè che si annulli il discriminante $a_1^2 - 4a_2 = 0$. In questo caso non solo $p(\lambda_1) = 0$, ma anche $p'(\lambda_1) = 0$. Questo ci suggerisce di derivare rispetto a λ l'equazione

$$L(e^{\lambda x}) = p(\lambda) e^{\lambda x}.$$

Otteniamo così

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} L(e^{\lambda x}) = L\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} e^{\lambda x}\right) = L(x e^{\lambda x}).$$

Pertanto

$$L(x e^{\lambda x}) = [p'(\lambda) + x p(\lambda)] e^{\lambda x}.$$

Ne segue che per $\lambda = \lambda_1$, essendo $p(\lambda_1) = p'(\lambda_1) = 0$,

$$L(x e^{\lambda_1 x}) = 0$$

Abbiamo così trovato un'altra soluzione della equazione omogenea (2) e possiamo sperare che le combinazioni lineari

$$c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x},$$

ci forniscano tutte le soluzioni della (2). In effetti è così, anche se, ancora una volta, non ne possediamo (per ora) una dimostrazione.

Resta ora da affrontare il caso in cui il polinomio $p(\lambda)$ non abbia soluzioni reali. In questo caso il polinomio avrà due radici complesse e coniugate λ_1 e λ_2 . Detta σ la parte reale di queste soluzioni e τ la parte immaginaria di λ_1 , le radici saranno $\lambda_1 = \sigma + i\tau$ e $\lambda_2 = \sigma - i\tau$. Possiamo anche in questo caso considerare le funzioni a valore complesso

$$e^{\lambda_1 x} = e^{\sigma x} (\cos \tau x + i \sin \tau x)$$

e

$$e^{\lambda_2 x} = e^{\sigma x} (\cos \tau x - i \sin \tau x).$$

Osserviamo che queste funzioni soddisfano la (2), quando si applica separatamente l'operazione di derivazione a parte reale e parte immaginaria. Ne segue che soddisfano la (2) le parti reali e le parti immaginarie di queste due funzioni. Abbiamo quindi trovato due funzioni distinte (non l'una multipla dell'altra) che soddisfano la (2) e possiamo ancora una volta sperare che tutte le soluzioni di (2) possano essere scritte come

$$c_1 e^{\sigma x} \cos \tau x + c_2 e^{\sigma x} \sin \tau x.$$

Ancora una volta la speranza è fondata. Ma mentre siamo sicuri, come nei casi precedenti che tutte queste funzioni sono soluzioni della (2) non abbiamo ancora dimostrato che non esistono altre soluzioni non riassumibili in questa formula. Le coppie di soluzioni che abbiamo trovato a seconda della collocazione delle radici del polinomio caratteristico dell'equazione (2) saranno chiamate le *soluzioni canoniche* della (2).

Prima di andare avanti ed affrontare il caso della equazione non omogenea cercheremo di dimostrare che in tutti e tre i casi considerati abbiamo trovato tutte le soluzioni della (2). Cominciamo con un Lemma

Lemma 1 *Sia $y(x)$ una soluzione dell'equazione omogenea*

$$L(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y = 0,$$

nell'intervallo I . Sia

$$\psi(x) = y'(x)^2 + y(x)^2.$$

Sia $k = 1 + |a_1| + |a_2|$, e sia x_0 un punto di I . Allora, per ogni punto $x \in I$,

$$\psi(x_0) e^{-2k|x-x_0|} \leq \psi(x) \leq \psi(x_0) e^{2k|x-x_0|}.$$

DIMOSTRAZIONE. La derivata della funzione $\psi(x)$ è $\psi' = 2y'y'' + 2yy'$. D'altra parte essendo y una soluzione della (2), risulta

$$y'' = -a_1y' - a_2y.$$

Pertanto

$$|y''(x)| \leq |a_1||y'(x)| + |a_2||y(x)|.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} |\psi'(x)| &\leq 2|y'(x)||y''(x)| + 2|y(x)||y'(x)| \leq \\ &2(|a_1||y'(x)|^2 + |a_2||y'(x)||y(x)|) + 2|y(x)||y'(x)| = \\ &2(1 + |a_2|)|y(x)||y'(x)| + 2|a_1||y'(x)|^2. \end{aligned}$$

Una disuguaglianza elementare fornisce

$$2|y(x)||y'(x)| \leq |y(x)|^2 + |y'(x)|^2.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} |\psi'(x)| &\leq (1 + |a_2|)(y(x)^2 + y'(x)^2) + 2|a_1|y'(x)^2 = (1 + |a_2|)y(x)^2 + (1 + 2|a_1| + |a_2|)y'(x)^2 \\ &\leq 2(1 + |a_1| + |a_2|)[y(x)^2 + y'(x)^2] = 2k\psi(x). \end{aligned}$$

Siamo così arrivati alle disuguaglianze

$$-2k\psi(x) \leq \psi'(x) \leq 2k\psi(x). \quad (3)$$

Se invece delle disuguaglianze (3) avessimo un'uguaglianza, cioè $\psi'(x) = 2k\psi(x)$, avremmo un'equazione lineare del primo ordine che sapremmo bene come risolvere: moltiplicheremmo ambo i lati dell'equazione per e^{-2kx} . E' quello che faremo per trattare le disuguaglianze cominciando dalla

$$\psi' - 2k\psi \leq 0.$$

La moltiplicazione per la funzione (sempre positiva) e^{-2kx} trasforma la disuguaglianza in

$$e^{-2kx}(\psi' - 2k\psi) = (e^{-2kx}\psi)' \leq 0.$$

Per $x > x_0$ possiamo integrare questa disuguaglianza tra x_0 e x , per ottenere

$$e^{-2kx}\psi(x) - e^{-2kx_0}\psi(x_0) \leq 0,$$

cioè, sempre per $x > x_0$,

$$\psi(x) \leq \psi(x_0)e^{2k(x-x_0)}.$$

Con lo stesso ragionamento, moltiplicando la disuguaglianza $\psi'(x) + 2k\psi(x) \geq 0$, per e^{2kx} si ottiene, sempre per $x > x_0$,

$$\psi(x_0)e^{-2k(x-x_0)} \leq \psi(x).$$

Questa è la tesi del lemma nell'ipotesi $x > x_0$.

Infine per il caso $x < x_0$ basta applicare lo stesso ragionamento integrando da x a x_0 , per ottenere

$$\psi(x_0)e^{2k(x-x_0)} \leq \psi(x) \leq \psi(x_0)e^{2k(x-x_0)},$$

che è la tesi del lemma nell'ipotesi $x < x_0$.

Teorema 1 . *Supponiamo che y_1 ed y_2 siano due soluzioni della equazione (2) $L(y) = 0$, in un intervallo I . Supponiamo inoltre che in un punto $x_0 \in I$ si abbia $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ e $y_1'(x_0) = y_2'(x_0)$. Allora in tutto l'intervallo I risulta $y_1(x) = y_2(x)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$. Allora $L(y) = 0$ e inoltre $y(x_0) = 0$ e $y(x_0)' = 0$. Posto, come nel Lemma 1, $\psi(x) = y(x)^2 + y'(x)^2$, risulta allora, per il Lemma 1,

$$e^{-2k|x-x_0|}\psi(x_0) \leq \psi(x) \leq e^{2k|x-x_0|}\psi(x_0).$$

Ma $\psi(x_0) = 0$. Pertanto $\psi(x) = 0$ per tutti gli $x \in I$.

Corollario 2 *Siano u_1 ed u_2 le due soluzioni canoniche dell'equazione (2) trovate utilizzando le radici del polinomio $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$, (a seconda dei casi: $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$ nel caso di due radici reali λ_1 e λ_2 , oppure $e^{\lambda x}$ e $x e^{\lambda x}$, nel caso di una sola radice reale λ , oppure $e^{\sigma x} \cos \tau x$ e $e^{\sigma x} \sin \tau x$ nel caso delle radici complesse coniugate $\sigma \pm i\tau$). Allora tutte le soluzioni della (2) sono combinazioni lineari di u_1 e u_2 .*

DIMOSTRAZIONE. Sia y una soluzione di $L(y) = 0$ in un intervallo I . Sia x_0 un punto di I . Poniamo $\alpha = y(x_0)$ e $\beta = y'(x_0)$. Consideriamo il sistema (nelle incognite c_1 e c_2)

$$\begin{aligned} c_1 u_1(x_0) + c_2 u_2(x_0) &= \alpha \\ c_1 u_1'(x_0) + c_2 u_2'(x_0) &= \beta \end{aligned}$$

Possiamo trovare una soluzione a questo sistema a condizione che sia diverso da zero il determinante $u_2'(x_0)u_1(x_0) - u_1'(x_0)u_2(x_0) = W(x_0)$. Introduciamo quindi la funzione $W(x) = W(u_1, u_2)(x)$, che è appunto il determinante

$W(x) = u_2'(x)u_1(x) - u_1'(x)u_2(x)$, e facciamo vedere che con riferimento alle funzioni u_1 e u_2 considerate, questa funzione non si annulla mai. Calcoliamo questa funzione nei tre casi considerati. Nel caso di due radici distinte del polinomio caratteristico $p(\lambda)$ si ha:

$$W(x) = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{\lambda_1 x + \lambda_2 x}$$

che non è mai zero. Nel caso di una sola radice λ del polinomio caratteristico si ha

$$W(x) = e^{\lambda x},$$

che non è mai zero. Infine nel caso delle radici complesse coniugate $\sigma \pm i\tau$ del polinomio caratteristico si ha

$$W(x) = e^{2\sigma x} \tau,$$

che non si annulla mai se le radici del polinomio, come si sta ipotizzando, hanno parte immaginaria non nulla. Questo significa che possiamo trovare numeri c_1 e c_2 che soddisfano al sistema. Consideriamo allora la funzione $u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$. Si tratta di una combinazione lineare delle funzioni u_1 e u_2 che è certamente una soluzione dell'equazione (2), che assume il valore α in x_0 e la cui derivata assume il valore β nello stesso punto. Per il Teorema 1 deve quindi essere $u(x) = y(x)$ per tutto gli x , e questo prova il corollario.

Corollario 3 *Dato un punto della retta reale x_0 e due numeri reali α e β esiste ed è unica la soluzione y della equazione $L(y) = 0$ che soddisfa alle condizioni iniziali $y(x_0) = \alpha$ e $y'(x_0) = \beta$.*

DIMOSTRAZIONE. Una volta scelti c_1 e c_2 in modo da soddisfare

$$\begin{aligned} c_1 u_1(x_0) + c_2 u_2(x_0) &= \alpha \\ c_1 u_1'(x_0) + c_2 u_2'(x_0) &= \beta \end{aligned}$$

(cosa possibile come indicato nella dimostrazione del precedente corollario) basta scegliere $y = c_1 u_1 + c_2 u_2$.

Siamo ora pronti ad affrontare il problema posto dall'equazione lineare non omogenea

$$L(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y = b. \quad (4)$$

Facciamo l'ipotesi che b sia una funzione continua definita in un intervallo I . Naturalmente si cercano soluzioni definite e derivabili due volte nello stesso intervallo.

Dimostreremo che una volta trovate tutte le soluzioni dell'equazione omogenea $L(y) = 0$, basterà trovare una sola soluzione particolare della (4) per

avere tutte le soluzioni della (4). In altre parole, data una funzione u^* che soddisfa $L(u^*) = b$ ogni soluzione della (4) si può scrivere come $u + u^*$, dove u è una soluzione di $L(u) = 0$. Infatti se $L(y) = b$, allora $L(y - u^*) = b - b = 0$. Ne segue che posto $u = y - u^*$, $y = u^* + u$, dove $L(u) = 0$.

Il problema di trovare tutte le soluzioni di (4) si riduce quindi al problema di trovare almeno una soluzione di (4). A questo scopo introdurremo un metodo noto come "metodo della variazione delle costanti". Partiamo dalle funzioni u_1 e u_2 le cui combinazioni lineari $c_1u_1 + c_2u_2$ forniscono tutte le soluzioni della equazione omogenea $L(y) = 0$. A questo punto "facciamo variare le costanti c_1 e c_2 ". In altre (e meno contraddittorie) parole cerchiamo una soluzione particolare della (4) tra le funzioni che possono scriversi come

$$u(x) = v_1(x)u_1(x) + v_2(x)u_2(x).$$

In questo caso, se si vuole imporre che u soddisfi la (4) deve essere

$$L(u) = L(v_1u_1 + v_2u_2) = (v_1u_1 + v_2u_2)'' + a_1(v_1u_1 + v_2u_2)' + a_2(v_1u_1 + v_2u_2) = v_1L(u_1) + v_2L(u_2) + (u_1v_1'' + u_2v_2'') + 2(u_1'v_1' + u_2'v_2') + a_1(u_1v_1' + u_2v_2') = b.$$

Poiché $L(u_1) = L(u_2) = 0$, e

$$(u_1v_1' + u_2v_2')' = (u_1'v_1' + u_2'v_2') + u_1v_1'' + u_2v_2'',$$

se imponiamo che:

$$u_1v_1' + u_2v_2' = 0, \tag{5}$$

$$u_1'v_1' + u_2'v_2' = b. \tag{6}$$

Si ottiene allora,

$$L(u) = L(v_1u_1 + v_2u_2) = b.$$

Per ottenere una soluzione particolare dell'equazione (4) dovremo quindi cercare funzioni v_1 e v_2 le cui derivate soddisfino le equazioni (5) e (6). Queste equazioni, per ogni x rappresentano un sistema lineare il cui determinante è $W(x) = u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x)$. Abbiamo visto che questo determinante è sempre diverso da zero. Pertanto possiamo applicare la regola di Cramer per risolvere il sistema ed ottenere:

$$v_1'(x) = \frac{-u_2(x)b(x)}{W(x)},$$

$$v_2'(x) = \frac{u_1(x)b(x)}{W(x)}.$$

Per ottenere v_1 e v_2 basterà a questo punto integrare. Ad esempio se x appartiene all'intervallo I dove è definito $b(x)$, possiamo scrivere:

$$v_1(x) = - \int_{x_0}^x \frac{u_2(t)b(t)}{W(t)} dt,$$

e

$$v_2(x) = \int_{x_0}^x \frac{u_1(t)b(t)}{W(t)} dt,$$

e scrivere una soluzione particolare della (4) come

$$u(x) = \int_{x_0}^x \frac{[u_1(t)u_2(x) - u_1(x)u_2(t)]b(t)}{W(t)} dt.$$

C'è un altro metodo più diretto, ma meno completo per trovare soluzioni particolari della (4). Esso si applica quando la funzione $b(x)$ è essa stessa una soluzione di un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti. Per spiegare il funzionamento di questo metodo dobbiamo rapidamente introdurre le equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti di ordine superiore a due. Cioè le equazioni del tipo

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0. \quad (7)$$

Osserviamo che applicando l'operatore L alla funzione $e^{\lambda x}$, come abbiamo fatto nel caso $n = 2$, si ottiene

$$L(e^{\lambda x}) = p(\lambda)e^{\lambda x},$$

dove $p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$. Replicando quanto abbiamo già fatto per il caso $n = 2$ possiamo trovare soluzioni di $L(y) = 0$ a partire dalle radici del polinomio $p(\lambda)$, che anche in questo caso si chiama polinomio caratteristico dell'equazione (7) o dell'operatore L . Naturalmente con n grande il discorso si complica perché possono esserci radici multiple sia reali che complesse, di molteplicità superiore a due. Non è difficile però dimostrare che in corrispondenza di una radice reale λ_1 , con molteplicità m possiamo trovare m soluzioni $x^{k-1}e^{\lambda_1 x}$, con $k = 1, \dots, m$, in corrispondenza di una radice complessa $\sigma + i\tau$ (e della sua coniugata $\sigma - i\tau$) con molteplicità m possiamo trovare $2m$ soluzioni del tipo $x^{k-1}e^{\sigma x} \cos \tau x$, e $x^{k-1}e^{\sigma x} \sin \tau x$, con $k = 1, \dots, m$.

Supponiamo ora di trovarci di fronte ad un'equazione lineare non omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti come la (4), in cui $b(x)$ sia essa stessa soluzione di un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti. Per fissare le idee supponiamo che $b(x) = \cos x$, e che

$$L(y) = y'' - 3y' + 2y.$$

Allora se $M(y) = y'' + y$, si avrà $M(b) = 0$. Possiamo però comporre i due operatori M ed L applicando prima L e poi M , cioè

$$M(L(y)) = L(y)'' + L(y) = y^{(4)} - 3y^{(3)} + 3y'' - 3y' + 2y.$$

Osserviamo che il polinomio caratteristico della composizione dei due operatori è il prodotto dei due polinomi caratteristici e cioè

$$(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2).$$

Una funzione u^* che soddisfi $L(u^*) = b$ sarà quindi una combinazione lineare delle funzioni che si ottengono come sopra dalle radici del polinomio caratteristico di $M(L(u))$. Alcune di queste radici (e precisamente le radici 1 e 2) sono radici del polinomio caratteristico di L e quindi danno luogo a funzioni annullate dall'operatore L , le altre, e cioè $\pm i$ danno luogo a funzioni che non sono annullate da L . Ne segue che una soluzione particolare di $L(y) = b$ si può trovare tra le combinazioni lineari di $\cos x$ e $\sin x$. In effetti

$$\begin{aligned} L(c_1 \cos x + c_2 \sin x) &= -c_1 \cos x - c_2 \sin x + 3c_1 \sin x - 3c_2 \cos x + 2c_1 \cos x + 2c_2 \sin x = \\ &= (c_1 - 3c_2) \cos x + (3c_1 + c_2) \sin x. \end{aligned}$$

Basterà quindi scegliere c_1 e c_2 in modo che $c_1 - 3c_2 = 1$ e $3c_1 + c_2 = 0$, per avere con $u^* = \frac{1}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x$ la soluzione particolare desiderata.

In questo esempio particolare siamo stati avvantaggiati dal fatto che le radici del polinomio caratteristico di M non si sovrapponevano alle radici del polinomio caratteristico di L . Cerchiamo però di dedurre da questo esempio una regola generale. Cerchiamo come si è detto una soluzione particolare u^* dell'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti

$$L(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y = b(x). \quad (8)$$

Ipotizziamo che b sia a sua volta una soluzione di una equazione lineare a coefficienti costanti omogenea, che si verifichi cioè $M(b) = 0$. Consideriamo la composizione dei due operatori differenziali L ed M , consideriamo cioè $M(L(y))$, ed in particolare l'equazione omogenea $M(L(y)) = 0$. Osserviamo che quest'ultima equazione è ancora una equazione lineare a coefficienti costanti, di ordine superiore a due, come la (7). Poiché si cerca una funzione che soddisfa a $L(y) = b$ e $M(b) = 0$, cerchiamo una funzione u^* che soddisfa $M(L(u^*)) = 0$. Siamo condotti quindi a considerare il polinomio caratteristico di $M(L(y))$, cioè il polinomio $p(\lambda)$ tale che $M(L(e^{\lambda x})) = p(\lambda)e^{\lambda x}$, e cercare u^* tra le combinazioni lineari delle soluzioni associate alle radici del polinomio $p(\lambda)$. Possiamo osservare che $p(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda)$ è il prodotto del

polinomio caratteristico $p_1(\lambda)$ di L per il polinomio caratteristico $p_2(\lambda)$ di M . Se questi due polinomi non hanno radici comuni possiamo trascurare le soluzioni associate alle radici del polinomio caratteristico di L perché queste soluzioni di $M(L(y)) = 0$ soddisfano anche a $L(y) = 0$, mentre noi cerchiamo una funzione y^* per la quale risulti $L(y^*) = b$. Possiamo quindi cercare y^* tra le combinazioni lineari delle soluzioni associate alle radici del polinomio caratteristico $p_2(\lambda)$ di M . E' quello che abbiamo fatto nell'esempio precedente.

E se i due polinomi caratteristici hanno radici comuni? Supponiamo, per semplicità che λ_1 sia una radice reale semplice del polinomio $p_1(\lambda)$ caratteristico di L , ed anche una radice semplice del polinomio caratteristico $p_2(\lambda)$. Allora λ_1 sarà una radice doppia del polinomio caratteristico di $M(L(y))$. Noi dobbiamo cercare y^* tra tutte le soluzioni di $M(L(y)) = 0$ che non soddisfano $L(y) = 0$. Questo significa che, nella formazione delle combinazioni lineari che ci interessano, possiamo (e quindi dobbiamo) omettere la funzione $e^{\lambda_1 x}$ che è annullata da L , ma non la funzione $x e^{\lambda_1 x}$ che è non è annullata da L ma è annullata dalla composizione ML di M ed L .

Queste parole di spiegazione dovrebbero giustificare la regoletta che riportiamo nella nota che segue.

Nota 1 . *Consideriamo l'equazione differenziale*

$$L(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y = b(x) \quad (9)$$

Supponiamo che

$$b(x) = H(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + K(x)e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

dove H e K sono polinomi in x . Se $\lambda = \alpha + i\beta$ non è una radice del polinomio caratteristico $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2$, una soluzione particolare della (9) ha la forma

$$u^*(x) = M(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + N(x)e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

dove $M(x)$ ed $N(x)$ sono due polinomi di grado uguale al massimo tra i gradi di $H(x)$ e $K(x)$.

Se invece $\alpha + i\beta$ è una radice del polinomio caratteristico, allora la funzione precedente va moltiplicata per x o per x^2 a seconda che $\alpha + i\beta$ abbia molteplicità uno o due.

Vale la pena di osservare che in molti casi considerati negli esercizi i polinomi $H(x)$ e $K(x)$ si riducono a costanti, mentre altrettanto spesso può succedere che $\beta = 0$, o che $\alpha = 0$, con evidenti effetti semplificatori sulle formule.

Come applicazione paradigmatica di questa regoletta possiamo osservare che se $b(x)$ è un polinomio anche u^* può essere un polinomio che avrà lo stesso grado di $b(x)$ se e solo se $a_2 \neq 0$. Cosa succede se invece $a_2 = 0$? La risposta è facile appena ci accorgiamo che stiamo parlando della molteplicità di 0 come radice del polinomio caratteristico.

Osserviamo anche che la regoletta dà per scontato che quando b è una somma $b = b_1 + b_2$ delle soluzioni canoniche di $M(y) = 0$, si risolvano separatamente i due sistemi, $L(y) = b_1$ e $L(y) = b_2$, questo consente di non trattare in generale, come abbiamo fatto noi per esigenze di chiarezza, il caso di un generico b che soddisfa a $M(b) = 0$.

Esercizio 1 *Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni:*

$$\begin{aligned}y'' - 4y &= 0, \\3y'' + 2y' &= 0, \\y'' + 16y &= 0, \\y'' &= 0, \\y'' - 4y' + 5y &= 0.\end{aligned}$$

Esercizio 2 *Trovare tutte le soluzioni dei seguenti problemi ai valori iniziali*

$$\begin{aligned}y'' - 2y' - 3y &= 0, & y(0) &= 0, & y'(0) &= 1 \\y'' + 10y &= 0, & y(0) &= \pi, & y'(0) &= \pi^2.\end{aligned}$$

Esercizio 3 *Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni*

$$\begin{aligned}y'' + 4y &= \cos x, \\y'' + 9y &= \sin 3x, \\y'' + y &= \tan x, & -\pi/2 < x < \pi/2, \\y'' - 4y' + 5y &= 3e^{-x} + 2x^2, \\y'' - 7y + 6y &= \sin x, \\4y'' - y &= e^x, \\6y'' + 5y' - 6y &= x.\end{aligned}$$