

1. I numeri reali

1.1. Naturali, Interi, Razionali.

Gli insiemi dei numeri naturali $\mathbb{N} : 0, 1, 2, \dots$, interi $\mathbb{Z} : 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, razionali $\mathbb{Q} = m/n$, $m, n \in \mathbb{Z}$ sono ben noti anche con le motivazioni aritmetiche che ne hanno suggerito l'introduzione.

Essi si rappresentano agevolmente, con riga e compasso, su una retta su cui sia stato posto un riferimento cartesiano:

- i naturali si costruiscono con ovvie traslazioni,
- gli interi con altrettanto ovvie simmetrie,
- i razionali ricorrendo al teorema di Talete sulle rette parallele.

1.2. I numeri come misure.

É del tutto naturale associare a un numero l'idea di misura, per esempio di una lunghezza, rispetto ad una assegnata unità di misura.

Fa parte quindi dell'esperienza comune osservare che può capitare:

- che una misura venga intera, cioè ad esempio il segmento assegnato sia esattamente un numero intero di volte l'unità di misura scelta,
- che la misura venga frazionaria, cioè ad esempio il segmento assegnato sia una volta e mezzo l'unità di misura,
- che al segmento assegnato non corrisponda alcuna giusta misura frazionaria: é il caso della diagonale del quadrato rispetto all'unità di misura pari al lato.

É chiaro che la terza possibilità non é un risultato empirico, ma é frutto di un ragionamento teorico: in altri termini tutte le misure empiriche rispetto a qualunque unità di misura sono sempre espresse da frazioni, sono cioè sempre razionali.

La non razionalità di $\sqrt{2}$ come di qualsiasi altra radice quadrata di un numero primo é frutto della ben nota proprietà di fattorizzazione dei naturali in fattori primi.

Una piccola generalizzazione consente di riconoscere che sono irrazionali le radici quadrate di tutti quei numeri n la cui fattorizzazione in fattori primi includa qualche potenza dispari.

Analogamente sono irrazionali le radici cubiche di tutti quei numeri n la cui fattorizzazione in fattori primi includa qualche potenza che non sia multiplo di 3.

1.3. I numeri reali.

Ci sono molti modi, sostanzialmente equivalenti, di introdurre i numeri reali.

Il piú intuitivo, considerato anche il motivo geometrico che per primo ne richiede la introduzione, é quello di identificare i numeri reali con i punti della retta.

Va tutto bene, nel senso che tale definizione non é sbagliata: al piú costituisce una

petitio principii

nel senso che dovremmo a sua volta dire cosa sia una retta.

Le difficoltà fondamentali si incontrano quando dobbiamo precisare sugli oggetti che chiamiamo *numeri reali*, qualunque sia il modo con cui li abbiamo introdotti, le ordinarie operazioni aritmetiche: é facile, anzi naturale, definire somma e sottrazione, é molto meno naturale definire moltiplicazioni e divisioni.

Le operazioni aritmetiche sui reali si fanno *sempre e solo* sui razionali approssimanti.

Il prodotto

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3}$$

si fa, sempre e solo, moltiplicando numeri razionali che approssimano $\sqrt{2}$ per numeri razionali che approssimano $\sqrt{3}$.

Il problema, teorico vero, é riconoscere che i prodotti cosí ottenuti approssimino qualcosa !

1.4. La scrittura decimale.

I numeri razionali, cioé le frazioni si scrivono quasi sempre, almeno a livello di calcolo numerico, in forma decimale: un certo numero di cifre intere, un punto, altre cifre intere:

$$\frac{9}{2} = 4.5, \quad \frac{17}{4} = 4.25, \text{ ecc.}$$

trascrizione fornita dall'ordinario procedimento della divisione.

La sorpresa consiste nel fatto che il decimale che si produce può avere

- o un numero finito di decimali,
- o avere forma periodica, cioé avere un gruppo di cifre decimali che si ripete periodicamente.

$$\frac{1}{3} = 0.33333 = 0.\bar{3}$$

É ben noto inoltre che qualsiasi numero espresso in forma decimale finita o in forma decimale periodica corrisponde a un razionale.

É inoltre nota la possibilità di esprimere uno stesso numero in piú forme decimali

$$1 = 0.\bar{9}, \quad 3.5 = 3.4\bar{9}, \text{ ecc}$$

1.5. I decimali illimitati.

Diamo questo nome a oggetti, in parte, nuovi: oltre ai tradizionali decimali periodici tipo

$$0.\bar{3} = 0.3333333 \dots \quad 12.5\bar{67} = 12.567777777 \dots$$

anche a sequenze illimitate quali

$$0.101001000100001 \dots$$

nei quali ci siano infiniti decimali che si presentino in forma non periodica (tra una cifra 1 e l'altra un pacchetto di zeri via via piú lungo). Possiamo anzi associare ad ogni intero, decimale finito o decimale periodico un decimale illimitato con l'evidente corrispondenza biunivoca

$$1 \leftrightarrow 0.999999999 \dots, \quad 25.34 \leftrightarrow 25.339999999, \quad \text{ecc.}$$

associando naturalmente ad ogni decimale non finito sé stesso.

1.6. La cardinalità.

La cardinalità del numerabile, in simboli la cardinalità \aleph_0 , (si legge *alef zero*) é quella dei numeri naturali.

Ci sono moltissimi insiemi che hanno la cardinalità \aleph_0 , cioè che possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali:

- l'insieme dei naturali maggiori di 5,
- l'insieme dei naturali pari,
- l'insieme dei numeri razionali¹,
- ecc.

Non hanno la cardinalità \aleph_0 gli insiemi finiti.

¹Si tratta di un risultato certamente non ovvio generalmente ricordato con il nome di *procedimento diagonale*

I razionali sono coppie di naturali e tali coppie possono essere disposte in un quadro (una matrice) infinito che ha alla prima riga, ordinatamente, tutte le coppie che hanno il secondo numero (il denominatore) 1, nella seconda riga tutte quelle che hanno il secondo numero 2, ecc.

La fila in cui disporle tutte si realizza seguendo il lunghissimo percorso diagonale

$$(1, 1), (2, 1), (1, 2), (3, 1), (2, 2), (1, 3), \dots$$

che include, prima o poi, tutte le coppie.

Attenzione la fila proposta e letta in termini di numeri razionali non corrisponde affatto al tradizionale ordinamento tra numeri piú grandi e piú piccoli: in altri termini dire che il primo numero razionale é $1/1$, il secondo é $2/1$, non equivale a dire che, in quell'ordinamento diagonale proposto il terzo numero, $1/2$ stia dopo il secondo, ecc.

Una fila che rispettasse anche l'ordinamento non é praticabile, tenuto conto della nota densità dei razionali.

Un insieme ha la cardinalità \aleph_0 , cioè può essere messo in corrispondenza biunivoca con i naturali, se è possibile disporlo in una fila ordinata:

- al primo posto l'elemento che corrispondeva al naturale 1,
- al secondo posto quello che corrispondeva al naturale 2,
- ecc.

Un'idea naif, molto diffusa, è quella che gli insiemi non finiti siano sostanzialmente tutti

infiniti allo stesso modo

cioè tutti analoghi ai numeri naturali.

Teorema 1.1. *L'insieme dei decimali illimitati non è finito e non ha la cardinalità \aleph_0 .*

DIMOSTRAZIONE. È ovvio che l'insieme proposto non è finito. Si riconosce facilmente che la parte dell'insieme proposto formata dai decimali di parte intera 0 non può esaurirsi in una fila.

Il ragionamento può essere condotto per assurdo:

- supponiamo che tutti i decimali del tipo $0, abc\dots$ siano stati disposti su una fila,
- sono in grado di scovarne almeno uno che non compare in tale fila,
- ne deduco che i decimali del tipo $0, abc\dots$ non possano essere esauriti in una fila.

Cioè i decimali del tipo $0, abc\dots$, e quindi, a maggior ragione, tutti i decimali illimitati non possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i naturali.

Sia quindi

A, B, C, \dots

l'ipotetica fila nella quale siano stati disposti tutti i decimali del tipo $0, abc\dots$: è facile riconoscere che se ne è, sicuramente perso qualcuno. Basta pensare al decimale illimitato che ha

- la prima cifra decimale diversa da quella che compare al primo posto in A ,
- la seconda diversa da quella che compare al secondo posto in B ,
- la terza diversa da quella che compare al terzo posto in C ,
- ecc.

□

Osservazione 1.2. *L'idea di insiemi non finiti é, si noti, esclusivamente matematica: la natura é (molto probabilmente) fatta solo di insiemi finiti.*

I notissimi numeri naturali sono il primo e piú antico insieme non finito considerato.

La possibilitá di considerare insiemi non finiti ma, in un certo senso,

ancora piú numerosi dei numeri naturali

nasce con i numeri reali: il primo insieme non finito e neanche numerabile.