ANALISI

Argomenti della Lezione

6 ottobre 2011

2. Ordinamento

Tra i numeri naturali, come tra i razionali, esiste la relazione di maggiore, minore: relazione definita in modo evidente a tutti.

Si tratta di affermazioni in accordo con la rappresentazione dei numeri interi e/o razionali sulla retta: dire che $x \leq y$ equivale a dire che il punto P_x della retta associato al numero x si trova a sinistra del punto P_y associato al numero y.

Una volta accolta l'idea che i numeri reali siano i punti della retta la relazione $x \leq y$ si legge esattamente in modo geometrico: accogliendo cioé l'idea che il punto P_x si trovi a sinistra del punto P_y.

L'ordinamento dei reali, letti come decimali illimitati (con la convenzione di sostituire 1 con 0.999999..., ecc.) tiene conto

- dell'ordinamento ovvio delle parti intere: se l'intero P é maggiore dell'intero Q allora
$$P.a_1a_2a_3... > Q.\alpha_1\alpha_2\alpha_3....$$
qualunque siano i decimali inseriti.
- dell'ordinamento delle parti decimali qualora le parti intere P coincidano:
$$P.a_1a_2a_3... > P.\alpha_1\alpha_2\alpha_3....$$
se riesce
$$a_k = \alpha_k \ \forall k < m \quad \text{e} \quad a_m > \alpha_m$$

2.1. I numeri positivi. Si dicono positivi i numeri $x \geq 0$: detto $P \subseteq \mathbb{R}$ l'insieme dei numeri positivi per ogni $y \in \mathbb{R}$ riesce
$$\text{o } y \in P \text{ oppure } -y \in P.$$
Le due appartenenze valgono contemporaneamente solo se $y = 0$.
Somma e prodotto di due numeri positivi sono positivi.
La relazione $y \geq z$ equivale alla
$$y - z \geq 0, \qquad y - z \in P$$
Se a é un numero positivo allora
$$y \geq z \quad \to \quad ay \geq az$$

infatti
$$ay - az = a(y - z)$$
é positivo come prodotto dei due numeri positivi a e $y - z$.
Se a é negativo $-a$ é positivo e quindi allora
$$y \geq z \quad \rightarrow \quad (-a)y \geq (-a)z \quad \rightarrow \quad az - ay \geq 0 \quad \rightarrow \quad az \geq ay$$
ovvero moltiplicare per un fattore negativo inverte la disuguaglianza.

$\boxed{\text{Proprietá formali dell'ordinamento:}}$

- $\forall x \in \mathbb{R} : \quad x \leq x$ (proprietá riflessiva)
- $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad aut \quad x \leq y \quad aut \quad y \leq x$ (prop. antisimmetrica)
- $x \leq y \quad AND \quad y \leq x \quad \rightarrow \quad x = y$
- $(x \leq y) \quad AND \quad (y \leq z) \quad \rightarrow \quad x \leq z$ (prop. transitiva)

2.2. Il modulo.

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ abbiamo riconosciuto che
$$aut \quad x \geq 0 \quad aut \quad -x \geq 0$$
si puó pertanto introdurre la funzione
$$modulo : \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
indicata con la notazione $|x|$ e definita al modo seguente
$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad -x \geq 0 \end{cases}$$
Pensando al segmento di estremi 0 e x il valore $|x|$ non é altro che l'ordinaria lunghezza di tale segmento.

La relazione fondamentale collegata al modulo é la seguente
$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad x \leq |x|$$
dalla quale discende anche
$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \pm x \leq |x|$$

Una relazione fondamentale che coinvolge la funzione modulo é la seguente
$$|x| = \max\{x, 0\} - \min\{x, 0\}$$
Un'altra occasione in cui la funzione modulo ha un ruolo importante é la seguente formula
$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \sqrt{x^2} = |x|$$

2.3. Intervalli.

La nozione di ordinamento permette di parlare di intervalli, particolari sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ definiti tramite disuguaglianze

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} :\ a \le x \le b\}, \quad (a,b) = \{x \in \mathbb{R} :\ a < x < b\}$$

In modo analogo si accolgono gli intervalli

$$[a,b), \quad (a,b], \quad (-\infty,a], \quad (-\infty,a), \quad [a,+\infty),\ (a,+\infty),\ (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$$

2.4. Ordinamento e numerabilitá.

Esiste un'idea molto diffusa che identifica sostanzialmente le parole *ordinamento* e *fila*.
Quanto di piú falso: mettere un insieme in fila vuol dire esaurire i suoi elementi appunto in una fila: finita, se si tratta di un insieme finito, infinita se si tratta di un insieme numerabile.
É chiaro del resto che disposti gli elementi di un insieme in fila si potrá attribuire loro un ordinamento dedotto dall'ordinamento naturale dei posti in una fila.
É, per esempio, quello che si fa normalmente mettendo dei nomi in ordine alfabetico.
Riconoscere invece che in un insieme é presente un *ordinamento* vuol dire solo

che esiste una relazione

che consente di confrontare due elementi x e y comunque presi nell'insieme e decidere che accade una delle tre possibilitá

$$x < y \quad x = y \quad y < x$$

avendo convenuto sul significato da attribuire al simbolo $<$.
Il teorema sulla non numerabilitá dei reali implica che l'insieme dei numeri reali possiede un ordinamento ma ricorda anche che esso non é esauribile in una fila.

2.5. Le disuguaglianze.

Le disuguaglianze, o disequazioni, sono formule collegate all'ordinamento: quando esse includono uno (o piú) parametri il problema che esse pongono é appunto determinare i valori dei parametri che rendono vera la disuguaglianza assegnata.
Cosí ad esempio il problema

$$x^2 < 1$$

consiste nella determinazione dei valori x per i quali sussista la relazione indicata: la risposta ben nota é *tutti i numeri reali dell'intervallo aperto* $(-1, 1)$.

Le tecniche con le quali risolvere problemi di disuguaglianze sono

- in genere strettamente collegate alle tecniche per risolvere i corrispondenti problemi di uguaglianza,
- dipendono naturalmente dal problema assegnato (polinomi di primo grado, secondo, ecc)
- tengono conto quasi sempre che la moltiplicazione per un fattore positivo mantiene la disuguaglianza, mentre la moltiplicazione per un fattore negativo la capovolge.

Le ben note *regole dei segni* consentono di gestire disuguaglianze relative a prodotti o a quozienti

$$P(x)Q(x) \geq 0 \Leftrightarrow \left\{ \left\{ \begin{array}{c} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \end{array} \bigcup \left\{ \begin{array}{c} P(x) \leq 0 \\ Q(x) \leq 0 \end{array} \right\} \right. \right.$$

e, analogamente,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \left\{ \left\{ \begin{array}{c} P(x) \geq 0 \\ Q(x) > 0 \end{array} \bigcup \left\{ \begin{array}{c} P(x) \leq 0 \\ Q(x) < 0 \end{array} \right\} \right. \right.$$

Osservazione 2.1. *Disuguaglianze quali*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 1$$

si riducono al caso precedente osservando che

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{P(x) - Q(x)}{Q(x)} \geq 0$$

2.6. Una disuguaglianza fondamentale.

La nota proprietá che i quadrati sono positivi permette di riconoscere che

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : \quad (a \pm b)^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad \mp 2ab \leq a^2 + b^2$$

da cui segue

$$2|a||b| \leq a^2 + b^2$$

La precedente disuguaglianza implica, fra l'altro la seguente

$$\forall x, y \geq 0 : \quad \sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2}$$

2.7. La disuguaglianza triangolare.

É particolarmente facile riconoscere che

$$|a \pm b| \leq |a| + |b|$$

Infatti

$$\pm a \leq |a|, \quad \pm b \leq |b|$$

da cui, sommando,

$$\pm a \ \pm b \ \leq |a| + |b|$$

ovvero

$$\pm(a \ \pm b) \leq |a| + |b| \quad \to \quad |a \pm b| \leq |a| + |b|$$

La disuguaglianza triangolare si generalizza naturalmente a tre addendi

$$|a \pm b \pm c| \leq |a| + |b \pm c| \leq |a| + |b| + |c|$$

e in generale

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

Analogamente riesce

$$\begin{cases} a = a + b - b & \to \quad |a| \leq |a+b| + |b| \\ b = a + b - a & \to \quad |b| \leq |a+b| + |a| \end{cases} \quad \to \quad ||a| - |b|| \leq |a+b|$$

2.8. La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Una disuguaglianza, molto famosa, detta disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, é la seguente

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)^2 \leq \left(a_1^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + ... + b_n^2\right)$$

che si scrive anche nella forma compatta

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

Consideriamo infatti la somma, non negativa qualunque sia $t \in \mathbb{R}$

$$(a_1+tb_1)^2+(a_2+tb_2)^2+...+(a_n+tb_n)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2+2t\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)+t^2\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

La nota condizione[1] perché il precedente trinomio di secondo grado in t abbia segno non negativo qualunque sia t é

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \leq 0$$

condizione che é la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

[1]Ritrovare la condizione necessaria e sufficiente sui coefficienti A, B, C perché l'equazione di secondo grado $At^2 + 2Bt + C = 0$ abbia radici reali, e la condizione necessaria e sufficiente perché riesca $\forall t \in \mathbb{R}: \ At^2 + 2Bt + C \geq 0$