

3. Completezza

3.1. La completezza dei numeri reali.

L'introduzione dei numeri reali e la proposta di immaginarli come una realizzazione numerica della retta corrisponde all'idea di ottenere qualcosa di

- continuo,
- senza interruzioni.

La circonferenza con la quale si riportava la diagonale del quadrato sulla semiretta determinata da un lato *doveva* intersecare la semiretta stessa.

Tale esigenza corrisponde ad una idea delle curve appunto continue, senza interruzioni.

Visioni alternative avrebbero potuto essere

- curve punteggiate, il cui aspetto continuo era solo collegato al difetto visivo che non ci consentiva di apprezzare gli spazi tra punto e punto (qualcosa di simile all'aspetto di un tessuto che appare come una superficie mentre sotto una lente adatta si riconosce come una rete)

Le curve disegnate sullo schermo di un computer sono punteggiate nel senso precedente: infatti il computer gestisce solo un numero finito, anche se piuttosto grande, di punti, circa un milione di pixel.

- curve realmente punteggiate ma con punti tanto stretti tra loro da continuare ad apparire come un continuo anche sotto qualsiasi zoom (é il caso della retta fatta dei soli punti a coordinate razionali)
- curve continue vere e proprie, cioè non punteggiate.

Il *continuum* delle linee geometriche che siamo abituati a considerare é una nostra creazione teorica, estremamente utile nella trattazione di molti problemi, ma certamente estremamente lontano da ogni realtà fisica.

Una lettura tecnica della proprietà di continuità o di completezza dei reali é espressa dalla seguente

Proprietá degli intervalli incapsulati
--

Per ogni successione di intervalli I_1, I_2, I_3, \dots chiusi, limitati e non vuoti incapsulati cioè tali che

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$$

esiste qualche x_0 contenuto in tutti gli intervalli, ovvero riesce

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset$$

3.2. Massimo e/o minimo.

L'ordinamento presente in \mathbb{R} consente di usare le parole maggiore, minore, massimo, minimo, limitato, ecc.

Il massimo di un insieme E di numeri reali é il piú grande tra gli elementi di E : mentre é abbastanza facile (e comunque possibile) trovare il massimo di un insieme E finito é sicuramente molto piú difficile (e spesso impossibile) trovare il massimo di un insieme E non finito.

Esempio 3.1. Se $E = \{a, b, c, d\}$ poniamo $\max = a$:

- confrontiamo \max con b : se riesce $\max \leq b$ poniamo $\max = b$
- confrontiamo \max con c : se riesce $\max \leq c$ poniamo $\max = c$
- confrontiamo \max con d : se riesce $\max \leq d$ poniamo $\max = d$

Terminati i controlli il termine \max coincide con l'elemento piú grande, il massimo, di E .

Esempio 3.2. Sia E la successione $\{0, 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, \dots\}$ é evidente che nessuno degli infiniti elementi via via piú grandi di E riesce il piú grande: l'insieme E pertanto non ha massimo.

Esempio 3.3. Sia E la successione $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots\}$ é evidente che 1, il primo degli infiniti elementi che compongono E é anche il piú grande: quindi 1 é il massimo di E .

Definizione 3.4. Un elemento $e \in E$ di un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ si dice massimo di E se

$$\forall x \in E : x \leq e$$

Definizione 3.5. Un elemento $f \in E$ di un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ si dice minimo di E se

$$\forall x \in E : f \leq x$$

Esempio 3.6. *L'insieme P dei numeri positivi ammette lo 0 come minimo, e non ammette massimo.*

L'insieme E dei numeri positivi di quadrato minore di 2 ammette minimo, lo zero, ma non ammette massimo.

L'insieme E dei numeri positivi di quadrato non maggiore di 2 ammette minimo, lo zero, e ammette massimo, $\sqrt{2}$.

3.3. Estremi di un insieme. Un numero M si dice maggiorante di un insieme E se

$$\forall x \in E : x \leq M$$

analoga definizione per un minorante m

$$\forall x \in E : m \leq x$$

Un insieme E si dice limitato superiormente se possiede maggioranti, si dice limitato inferiormente se possiede minoranti.

Un insieme contemporaneamente limitato superiormente e inferiormente si dice limitato.

Esempio 3.7. *L'insieme dei numeri negativi é limitato superiormente.*

L'insieme dei numeri positivi é limitato inferiormente.

L'insieme dei numeri positivi e di quadrato minore di 2 é limitato.

L'insieme dei numeri naturali non é limitato.

Definizione 3.8. *Si dice estremo superiore di E il piú piccolo maggiorante di E*

Definizione 3.9. *Si dice estremo inferiore di E il piú grande minorante di E*

É evidente che se E é dotato di massimo allora tale valore é anche estremo superiore di E , mentre un numero puó essere estremo superiore di un insieme E senza essere massimo di E

Esempio 3.10. *Il numero 1 é (non é facilissimo provarlo) l'estremo superiore di $\{0, 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, \dots\}$.*

Teorema 3.11. *L'estremo superiore di E (se esiste) é unico.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che ce ne siano due λ_1 e λ_2 , ovviamente diversi.

Supponiamo ad esempio che $\lambda_1 < \lambda_2$: ma allora l'essere λ_1 un maggiorante di E viene a negare che λ_2 sia il piú piccolo maggiorante di E . \square

Teorema 3.12. *Ogni insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente ammette estremo superiore.*

La dimostrazione di questo importante risultato sarà ottenuta con il seguente algoritmo:

- presi $e \in E$ ed M un maggiorante di E consideriamo l'intervallo $[e, M]$ che, per comodità chiamiamo $[a_1, b_1]$,
- consideriamo il punto medio $c = (a_1 + b_1)/2$ di tale intervallo:
 - se c è un maggiorante di E indichiamo con $[a_2, b_2]$ l'intervallo $[a_1, c]$
 - se c non è un maggiorante di E indichiamo con $[a_2, b_2]$ l'intervallo $[c, b_1]$.
- iteriamo su $[a_2, b_2]$ il procedimento (costruzione del punto medio e denominazione con $[a_3, b_3]$ di una delle due metà in cui $[a_2, b_2]$ viene suddiviso, ecc)

La successione $\{[a_n, b_n]\}$ così costruita è

- formata da intervalli chiusi, limitati e non vuoti, $a_n < b_n$,
- incapsulati (uno dentro l'altro)
- a_n non è un maggiorante mentre b_n è un maggiorante

pertanto, per l'assioma sugli intervalli incapsulati, esistono punti comuni a tutti gli intervalli della successione.

Tenuto conto che gli intervalli della successione hanno lunghezze via via più piccole riconosciamo che *i punti comuni* a tutti gli intervalli della successione non possono che essere uno solo.

È possibile riconoscere (e sarà provato fra qualche lezione) che tale unico punto comune è l'estremo superiore di E .

Proposizione 3.13. *Un numero λ è estremo superiore di E se e solo se soddisfa le seguenti due proprietà:*

- è un maggiorante di E ,
- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists e \in E$ tale che $\lambda - \varepsilon < e$.

DIMOSTRAZIONE. Si tratta solo di riconoscere il fatto, quasi ovvio, che la seconda condizione equivale a dichiarare che λ sia il più piccolo maggiorante: ogni numero $\lambda - \varepsilon$, ovviamente più piccolo di λ , non deve essere più un maggiorante. \square

3.4. La proprietà archimedeica.

I numeri naturali \mathbb{N} hanno, nell'ambito dei numeri reali \mathbb{R} la seguente proprietà:

Assegnato comunque un numero reale a esiste un numero naturale $n \in \mathbb{N}$ tale che $a < n$.

La proprietà si apprezza meglio sotto quest'altra chiave di lettura

Assegnati comunque due numeri positivi $0 < a < b$ esiste sempre un multiplo del minore che supera il maggiore

$$\exists n \in \mathbb{N} : b < na$$

Osservazione 3.14. *Un ordinamento che soddisfi la proprietà archimedeica é, in un certo senso, un ordinamento democratico:*

*esistono individui **A** meno importanti e individui **B** piú importanti, le volontà espresse da un **A** contano meno di quelle espresse da un **B**, tuttavia se un ragionevole numero di **A** si coalizza la loro volontà collettiva prevale su quella di un **B**.*

Una società divisa in caste può essere non archimedeica, nel senso che le volontà di un numero comunque alto di individui della classe inferiore non prevalgono sulle volontà anche di un solo elemento della classe superiore.

3.5. Il piano e altre realtà.

Detto \mathbb{R} l'insieme dei numeri reali, la nota operazione di *prodotto cartesiano* conduce a definire

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^3 &= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ \dots &\dots \\ \mathbb{R}^n &= \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \dots \times \mathbb{R}}_n \end{aligned}$$

Ovviamente \mathbb{R}^2 rappresenta il piano, \mathbb{R}^3 lo spazio, \mathbb{R}^4 lo spazio attribuendo ad ogni punto un valore, per esempio la sua temperatura, ecc.

Negli \mathbb{R}^n con $n > 1$ non é definito alcun ordinamento.

3.6. Il modulo in \mathbb{R}^n .

In \mathbb{R} , come in tutti gli \mathbb{R}^n é definita una metrica, cioè una espressione della distanza tra due punti: l'espressione suggerita, nel caso del piano \mathbb{R}^2 dal teorema di Pitagora é la seguente

$$d\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

che si generalizza in dimensione maggiore in

$$d\{(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Posto

$$|(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

espressione che prende ancora (come nel caso di \mathbb{R}) il nome di *modulo* la formula della distanza diventa

$$d\{(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\} = |(x_1, \dots, x_n) - (y_1, \dots, y_n)|$$

In dimensione 1 riesce naturalmente

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

e rappresenta la distanza del numero x dallo zero.