

#### 4. Funzioni elementari

**4.1. Grafici.** Il grafico di una funzione

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \rightarrow y = f(x)$$

é un sottoinsieme del piano  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  costituito dai punti

$$\forall x \in D : \quad (x, f(x))$$

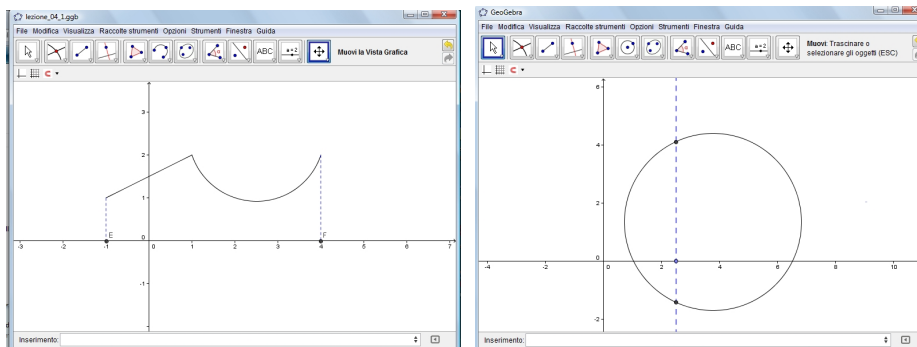


FIGURA 1. Il primo é un grafico, il secondo no.

Nei casi piú comuni il grafico é una curva del piano che ha alcuni requisiti fondamentali:

- i suoi punti si trovano solo in corrispondenza di ascisse  $x \in D$ : pertanto se la funzione fosse definita, ad esempio, sull'intervallo  $[-1, 1]$  i punti del grafico hanno ascisse in  $[-1, 1]$ , ovvero non esistono punti del grafico con ascisse 2 o altri valori  $x \notin [-1, 1]$ .
- in corrispondenza ad ogni  $x \in D$  c'è un solo punto del grafico, ovvero le rette verticali se intersecano il grafico lo intersecano in un solo punto (una circonferenza non é il grafico di alcuna funzione  $y = f(x)$ .)
- ogni sottoinsieme del piano che soddisfi le due precedenti condizioni determina una funzione  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  di cui é il grafico.

## 4.2. Un grafico poco visibile.

Sia

$$f : x \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{se } x \in Q \\ 0 & \text{se } x \notin Q \end{cases}$$

Il suo grafico, disegnato su tutto  $\mathbb{R}$  é formato da.... moltissimi punti che stanno sull'asse  $x$ , moltissimi altri che stanno sulla retta orizzontale  $y = 1$ .

Né l'asse  $x$  né la retta  $y = 1$  sono esauriti dal grafico detto.

## 4.3. Grafici deducibili.

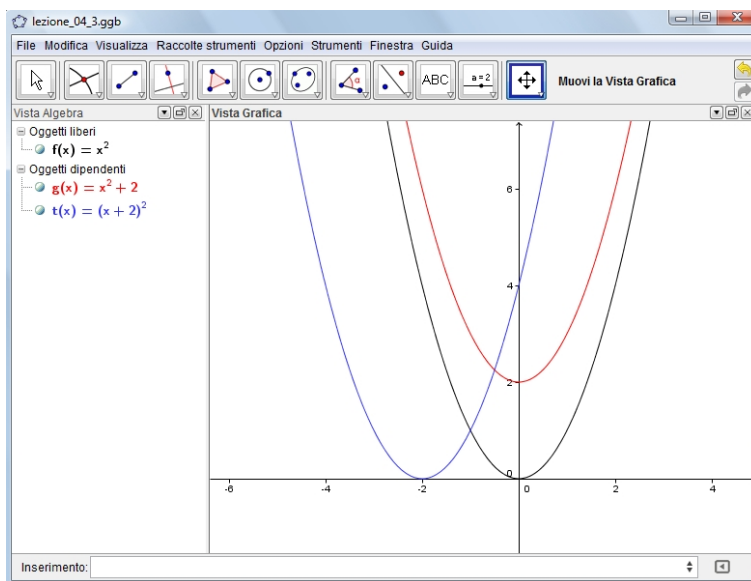
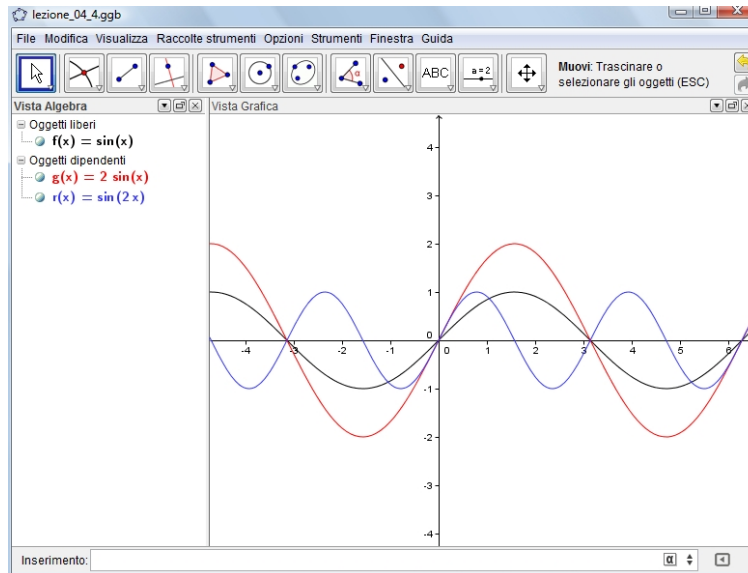


FIGURA 2.  $x^2$ ,  $x^2 + 2$ ,  $(x + 2)^2$

- traslazioni:
  - dal grafico di  $f(x)$  a quello di  $f(x) + c$ ,
  - dal grafico di  $f(x)$  a quello di  $f(x + c)$ .
- dilatazioni
  - dal grafico di  $f(x)$  a quello di  $kf(x)$ ,
  - dal grafico di  $f(x)$  a quello di  $f(kx)$ .
- dai grafici di  $f(x)$  e  $g(x)$  a quelli di  $\alpha f(x) + \beta g(x)$ ,
- dal grafico di  $f(x)$  a quello di  $1/f(x)$ ,
- dal grafico di  $f(x)$  a quello di  $|f(x)|$

FIGURA 3.  $\sin(x)$ ,  $2 \sin(x)$ ,  $\sin(2x)$ 

#### 4.4. Parte intera, mantissa, periodicit .

- gli operatori max e min
- $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ ,  $f_-(x) = -\min\{f(x), 0\}$
- le relazioni fondamentali

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x), \quad |f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$$

- La funzione parte intera, la mantissa
- La funzione denti di sega
- Composizione, funzioni periodiche.

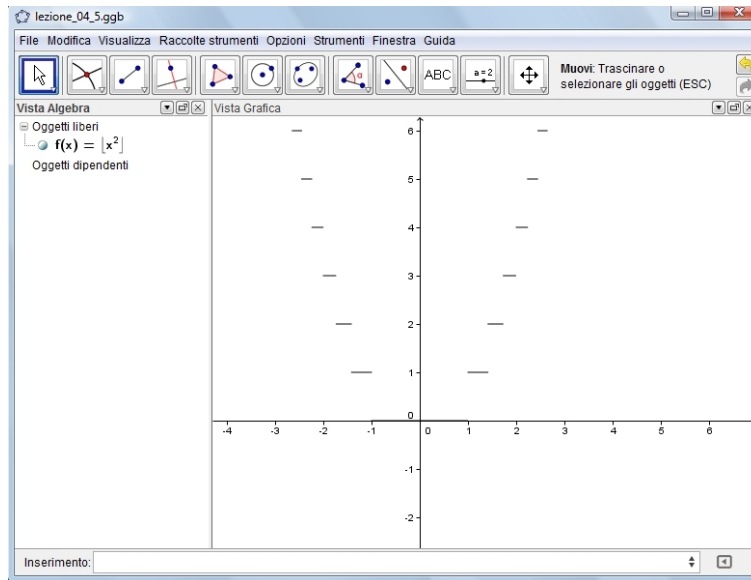


FIGURA 4.  $f(x) = [x^2]$ , parte intera di  $x^2$

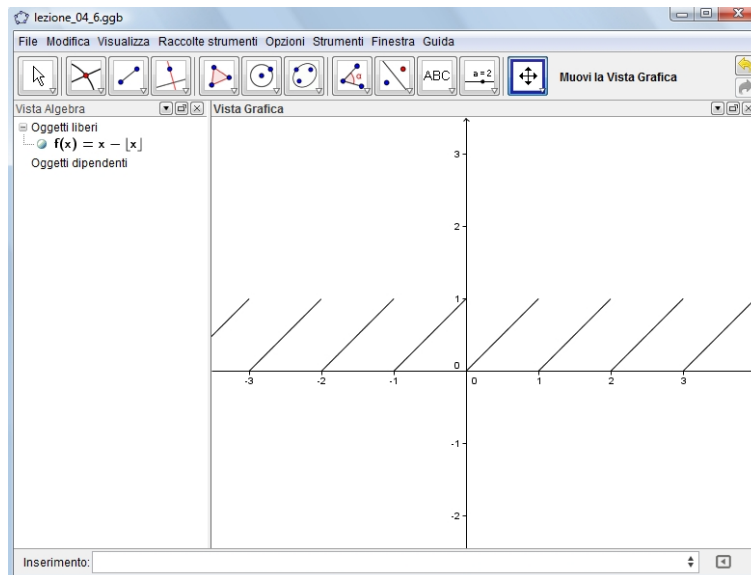


FIGURA 5.  $f(x) = x - [x]$ , la funzione *denti di sega*.