ANALISI

Argomenti della Lezione

13 ottobre 2011

5. Funzioni elementari

5.1. I polinomi.

- primo grado, legami con le rette,
- secondo grado, legami con la parabola:

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a(x+\alpha)^2 + \beta$$

- polinomi fattorizzabili in fattori di primo o secondo grado.

- I limiti all'infinito.

$$P(x) = ax^n + bx^{n-1} + \cdots = x^n \left(a + \frac{b}{x} + \ldots \right)$$

Tenuto presente che il prodotto ha, per x grande il segno di ax^n risulta che
  - se n é pari x^n é positivo e quindi il segno di $P(x)$ é il segno di a
  - se n é dispari x^n ha il segno di x e quindi il segno di $P(x)$ é il segno di a per $x > 0$ e l'opposto per $x < 0$.
- *L'osservazione vicino a zero*: tenuto conto che, per x vicino a zero i termini x^2, x^3, ... contano meno, il grafico di un polinomio $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$ in un intervallo piccolo intorno allo zero, somiglia al grafico della sola parte $a + bx$
- Il grafico dei polinomi: o parabole tipo x^2 o cubiche tipo x^3.
  Supponendo di occuparci di polinomi con coefficiente $a = 1$ si riconosce che:
  - tutti i polinomi di grado pari hanno un grafico molto simile a quello di x^2
  - tutti i polinomi di grado pari hanno un grafico molto simile a quello di x^3

5.2. Le funzioni razionali.

- La funzione $f(x) = 1/x$, l'iperbole

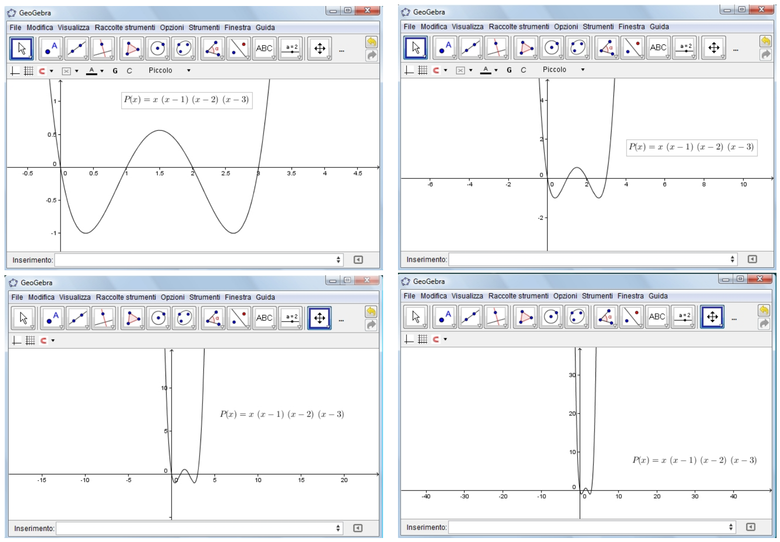

FIGURA 1. Il grafico di un polinomio di grado pari

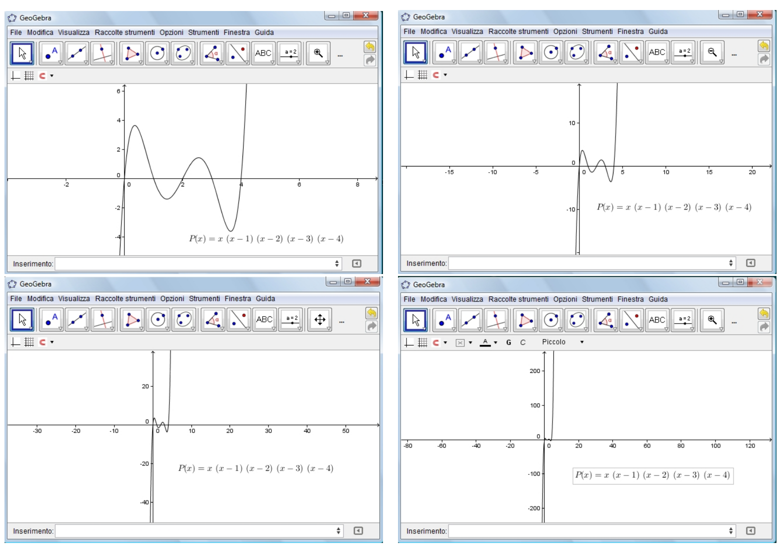

FIGURA 2. Il grafico di un polinomio di grado dispari

- quozienti di polinomi di primo grado, legami con l'iperbole
$$R(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{1}{c}\left\{a + (bc-ad)\frac{1}{cx+d}\right\}$$
Il grafico di $R(x)$ puó essere dedotto quindi dalla conoscenza del grafico di $f(x) = 1/x$, iperboli traslate e dilatate.
- La funzione $g(x) = 1/(1+x^2)$

- le disuguaglianze relative a espressioni razionali.
- le razionali proprie e i loro limiti all'infinito.
- somme di polinomi e di razionali proprie (numeratore di grado minore del denominatore)
- il dominio, gli asintoti verticali.
- decomporre una funzione razionale nella somma di un polinomio e di una razionale propria.

5.3. Le radici.

- monotonia delle x^n per $x \geq 0$ e quindi invertibilitá,
- monotonia di x^{2n+1} in tutto $\mathbb{R}$, e quindi invertibilitá in $\mathbb{R}$.