ANALISI

Argomenti della Lezione

14 ottobre 2011

6. Successioni

Una successione é una funzione

$$f : \mathbb{N} \quad \to \quad \mathbb{R}$$

l'immagine di f costituisce una fila di numeri reali

$$\{f(1),\ f(2),\ f(3), \dots\}$$

spesso indicata con la notazione

$$\{a_1,\ a_2,\ a_3, \dots\}$$

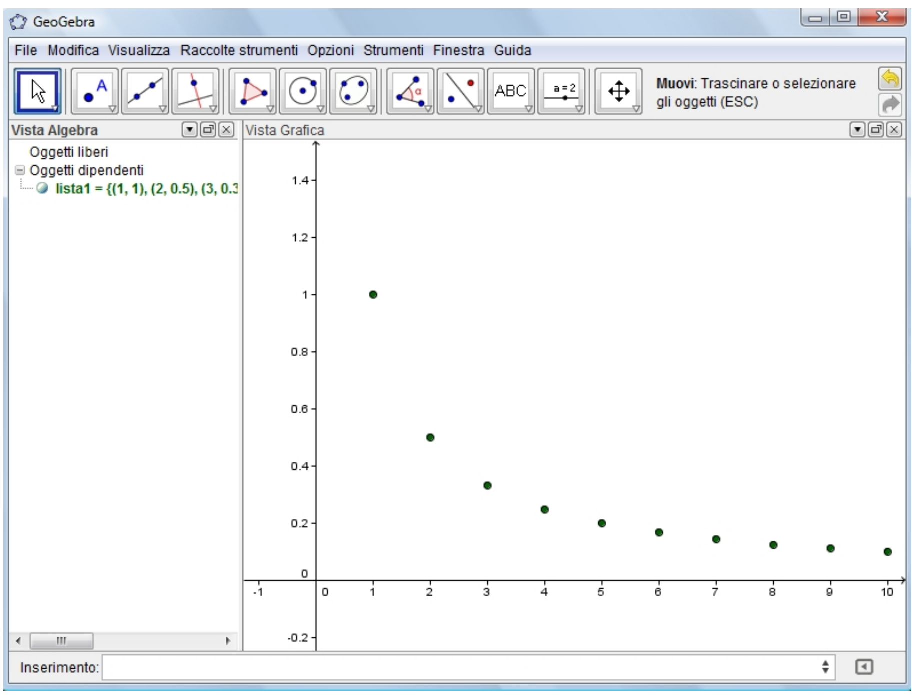

FIGURA 1. $f(n) = \dfrac{1}{n}$

Esempio 6.1. *Scelta $f(n) = n$ si ottiene la successione piú naturale,*

$$\{1,\ 2,\ 3, \dots\}$$

... quella dei numeri naturali!

La scelta

$$f(n) = \frac{1}{n}$$

produce, vedi Figura 1, la successione

$$\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}, \dots\right\}$$

Osservazione 6.2. *L'assegnazione di una successione, cioé di una funzione $f : \mathbb{N} \quad \to \quad \mathbb{R}$, non é necessariamente fornita da una funzione esplicita, magari espressa da un polinomio, da una funzione razionale o da una formula che coinvolga poche funzioni elementari famose.*
L'assegnazione puó essere fatta, ad esempio, in modo ricorsiva:

- *si assegna il primo valore $a_1 = A$*
- *si deducono i successivi valori a_n per $n > 1$ ricavando ciascuno dal precedente con una legge g assegnata*

$$a_n = g(a_{n-1})$$

Cosí, ad esempio si potrebbe assegnare la successione $a_1 = 10$ e, per ogni indice n successivo $a_n = \sin(a_{n-1})$, definendo cosí la successione

$$\{10,\ -0,544,\ -0,517,\ -0,495,\ -0,475, \dots\}$$

L'espressione proposta rientra naturalmente nella forma $f : \mathbb{N} \quad \to \quad \mathbb{R}$ essendo

$$f : n \quad \to \quad \begin{cases} 10 & se \quad n = 1 \\ \sin^{[n-1]}(10) & se \quad n > 1 \end{cases}$$

avendo indicato con $\sin^{[n-1]}(10)$ il valore della funzione composta $n-1$ volte

$$\sin(\sin(\dots(10))\dots)$$

La proposta ricorsiva indicata puó ulteriormente essere complicata come segue

- *si assegnano i primi due valori $a_1 = A$, $a_2 = B$,*
- *si determinano i successivi relativi a $n > 2$ con una legge quale, ad esempio*

  $$a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$$

  essendo α e β due costanti assegnate.

Un caso di quest'ultima forma si incontra in relazione alla celebrata successione di Fibonacci

$$\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987...\}$$

nella quale, assunti $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ si determinano i successivi termini con la formula

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

6.1. Attributi di una successione.

Definizione 6.3. *Una successione* $\{a_1,\, a_2,\, \dots\}$ *si dice limitata se l'immagine* $f(N)$ *della funzione che la definisce ovvero l'insieme dei suoi valori, é limitato in* $\mathbb{R}$*, cioé se esiste un intervallo* $[A, B] \subset \mathbb{R}$ *tale che*

$$\forall k \in N : \quad a_k \in [A, B]$$

Esempio 6.4. *La successione*

$$\left\{1,\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{3}, \dots\right\}$$

é limitata: infatti tutti i suoi termini cadono nell'intervallo $[0, 1]$.

Definizione 6.5. *Una successione* $\{a_1,\, a_2,\, \dots\}$ *si dice monotona crescente se*

$$\forall k \in N : \quad a_k \leq a_{k+1}$$

Definizione 6.6. *Una successione* $\{a_1,\, a_2,\, \dots\}$ *si dice monotona decrescente se*

$$\forall k \in N : \quad a_k \geq a_{k+1}$$

Definizione 6.7. *Le successioni monotone crescenti e quelle monotone decrescenti sono dette monotone.*

Esempio 6.8. *La successione* $\{1, -1, 1, -1, \dots\}$ *determinata dalla funzione* $f(n) = (-1)^n$ *non é monotona.*

6.2. Sottosuccessioni.

Assegnata $f : \mathbb{N} \quad \to \quad \mathbb{R}$ sia

$$\{a_1,\, a_2,\, \dots\}$$

la successione da essa determinata: sia inoltre g una funzione

$$g : \quad N \quad \to \quad N$$

crescente, cioé tale che

$$n < m \quad \to \quad g(n) < g(m)$$

La successione determinata dalla composta $f \circ g$

$$n \quad \to \quad f[g(n)]$$

si dice *sottosuccessione* della $\{a_1,\, a_2,\, \dots\}$.

Esempio 6.9. *Sia* $g(n) = 2n$ *allora la sottosuccessione é*

$$\{a_2,\, a_4,\, a_6,\, \dots\}$$

quella formata dai termini di posto pari.
Se $g(n) = n^2$ *allora la sottosuccessione é*

$$\{a_1,\, a_4,\, a_9,\, a_{16},\, \dots\}$$

Se $g(n) = n -$ *esimo numero primo allora la sottosuccessione é*

$$\{a_2,\, a_3,\, a_5,\, a_7, \dots\}$$

Proposizione 6.10. *Se una successione é limitata allora sono limitate tutte le sue sottosuccessioni.*

Esempio 6.11. *La successione non limitata*

$$\{1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 6, \dots\}$$

ammette la sottosuccessioni dai termini di posto pari, limitata.

Proposizione 6.12. *Se una successione é monotona sono monotone tutte le sue sottosuccessioni.*

6.3. Definizione di limite.

La fila dei numeri

$$\{a_1,\, a_2,\, a_3,\, \dots\}$$

di una successione puó possedere un fenomeno, a volte evidente, di essere formata da termini che approssimano sempre di piú un numero reale.
Questo accade ad esempio per la successione

$$\left\{1,\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{3}, \dots\right\}$$

i cui termini evidentemente si avvicinano sempre piú allo zero.
Il fenomeno non accade invece per la successione

$$\{1,\, -1,\, 1,\, -1, \dots\}$$

i cui termini oscillano indefinitamente tra il valore 1 e il valore -1.
Il numero ℓ , eventualmente esistente, al quale i termini della successione $\{a_1,\, a_2,\, a_3,\, \dots\}$ si approssimano via via di piú prende il nome

di limite della successione e viene tradizionalmente indicato con la notazione tipografica

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$$

Riferendosi ai due esempi precedenti quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} (-1)^n \; non \;\; esiste$$

Il limite di una successione $\{a_1,\, a_2,\, a_3,\, \dots\}$ pertanto soddisfa le seguenti *proprietá del limite*

- é un numero reale ℓ,
- comunque si scelga una distanza $\varepsilon > 0$ deve esistere una soglia n_ε tale che

$$\forall n \geq n_\varepsilon : \;\; |a_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Esempio 6.13. *Verifichiamo che $\ell = 0$ soddisfi le proprietá del limite relativamente alla successione $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$:*
si tratta di poter riconoscere che, fissato comunque $\varepsilon > 0$ la disuguaglianza

$$\left| \frac{1}{n} - \ell \right| \leq \varepsilon$$

sia soddisfatta da un certo opportuno n_ε in poi.

$$\frac{1}{n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} \leq n$$

Basta quindi prendere come soglia n_ε il primo numero naturale maggiore o uguale a $1/\varepsilon$.

Definizione 6.14. *Le successioni dotate di limite si dicono* **convergenti**.

La proprietá di limite si riferisce all'appartenenza

$$a_k \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$$

dei termini di una successione da una certa soglia n_ε in poi, cioé per $k \geq n_\varepsilon$.
La posizione dei termini di indice precedente a n_ε non viene considerata.
Quindi se una successione é convergente saranno convergenti, e allo stesso limite, tutte le altre successioni che si possono costruire cambiando, per esempio, il primo termine, o anche cambiando i primi due: infatti, in entrambi i casi i termini di posto $k \geq 3$ non sono cambiati: e quindi se si avvicinavano via via di piú ad ℓ continuano naturalmente a farlo.

Si puó quindi accogliere la seguente

Proposizione 6.15. *La successione* $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ *abbia limite* ℓ*: allora tutte le successioni* $\{b_1, b_2, b_3, ..\}$ *che differiscano dalla* $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ *solo per un numero finito di termini convergono allo stesso limite* ℓ*.*

6.4. Primi teoremi.

Teorema 6.16. *Le successioni convergenti sono limitate.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots\}$ ha limite ℓ allora, scelto $\varepsilon = 1$ esiste una soglia $\overline{n}$ tale che

$$\forall k \geq \overline{n} : \quad |a_k - \ell| \leq 1 \quad \to \quad a_k \in [\ell - 1,\ \ell + 1]$$

Indicato con $[A, B]$ un intervallo che contenga i primi $\overline{n} - 1$ termini, é facile riconoscere che

- esiste un intervallo $[\alpha,\ \beta]$ che contiene sia l'intervallo $[A, B]$ che l'intervallo $[\ell - 1,\ \ell + 1]$
- tutti i termini della successione sono contenuti in tale $[\alpha,\ \beta]$.

$\square$

Il teorema naturalmente implica che

Proposizione 6.17. *Le successioni illimitate non sono convergenti.*

Teorema 6.18. *Il limite di una successione convergente é unico.*

DIMOSTRAZIONE. Se, per assurdo, esistessero due numeri ℓ_1 ed ℓ_2 con la proprietá di limite per la successione $\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots\}$ allora, scelto un ε tale che

$$(\ell_1 - \varepsilon, \ell_1 + \varepsilon) \cap (\ell_2 - \varepsilon, \ell_2 + \varepsilon) = \emptyset$$

perverremmo all'assurdo che

- da una certa soglia $\overline{n}_1$ i termini della successione dovrebbero stare tutti nell'intervallo $(\ell_1 - \varepsilon, \ell_1 + \varepsilon)$
- e da una certa altra soglia $\overline{n}_2$ dovrebbero stare tutti nell'altro $(\ell_2 - \varepsilon, \ell_2 + \varepsilon)$.

Da cui, per

$$n \geq \max(\overline{n}_1, \overline{n}_2)$$

i termini a_n dovrebbero stare in entrambi gli intervallini che, invece, non hanno punti comuni. $\square$

Teorema 6.19. *Se una successione é convergente allora tutte le sue sottosuccessioni sono convergenti allo stesso limite.*

Proposizione 6.20. *Una successione che possiede sottosuccessioni convergenti a limiti diversi non é convergente.*