ANALISI

Argomenti della Lezione

19 ottobre 2011

7. Successioni

7.1. Operazioni su successioni.

Una funzione

$$g: \ \mathbb{R} \quad \to \quad \mathbb{R}$$

permette di associare ad una funzione $\{a_1,\, a_2,\, \dots\}$ la nuova successione

$$\{g(a_1),\, g(a_2),\, \dots\}$$

Esempio 7.1. *Scelta, ad esempio $g(x) = x^2$ alla successione $\{a_1,\, a_2,\, \dots\}$ facciamo corrispondere la*

$$\{a_1^2,\, a_2^2,\, \dots\}$$

Analogamente una funzione di due o piú variabili

$$p: \ \mathbb{R}\times\mathbb{R} \quad \to \quad \mathbb{R}, \quad (x,y) \quad \to \quad p(x,y)$$

permette di associare a due successioni $\{a_1,\, a_2,\, \dots\}$, $\{b_1,\, b_2,\, \dots\}$ la terza successione

$$p(a_1,b_1),\, p(a_2,b_2),\, \dots$$

Le piú comuni situazioni al riguardo sono quelle relative a funzioni g o p dedotte dalle ordinarie operazioni aritmetiche: cosí assegnate due successioni $\{a_1,\, a_2,\, \dots\}$, $\{b_1,\, b_2,\, \dots\}$ é ragionevole occuparsi delle nuove

$$\{a_1+b_1,\, a_2+b_2, \dots,\} \qquad \{a_1b_1,\, a_2b_2, \dots\}, \qquad \left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots\right\}$$

con le ovvie prudenze nel caso dei quozienti.
É importante riconoscere quali degli attributi (limitatezza, monotonia, convergenza, ...) eventualmente posseduti dalle due $\{a_1,\, a_2,\, \dots\}$, $\{b_1,\, b_2,\, \dots\}$ si mantenga nelle nuove ottenute con le operazioni di somma, prodotto, quoziente.

Proposizione 7.2. *Sia $\{a_1,\, a_2,\, \dots\}$ convergente ad A: qualunque sia $\alpha\in\mathbb{R}$ la successione*

$$\{\alpha a_1,\, \alpha a_2,\, \dots\}$$

converge a αA

Dimostrazione. Occorre riconoscere che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una soglia n_ε tale che
$$\forall k \geq n_\varepsilon : \quad |\alpha a_k - \alpha A| \leq \varepsilon$$
Tenuto conto che per ogni $\sigma > 0$ esiste una soglia $\overline{n}$ tale
$$\forall k \geq \overline{n} : \quad |a_k - A| \leq \sigma$$
riesce
$$\forall k \geq n_\varepsilon : \quad |\alpha a_k - \alpha A| = |\alpha||a_k - A| \leq |\alpha|\sigma$$
Da cui la tesi scegliendo σ tale che $|\alpha|\sigma \leq \varepsilon$. □

Proposizione 7.3. *Se $\{a_1, a_2, \ldots\}$, $\{b_1, b_2, \ldots\}$ sono convergenti rispettivamente ad A e B allora le successioni somma e prodotto sono convergenti rispettivamente a $A + B$ e $A.B$.*

Dimostrazione.

$\boxed{\text{Somma:}}$

Scelto $\varepsilon > 0$ valutiamo se esista una soglia n_ε oltre la quale riesca $|(a_k + b_k) - (A + B)| \leq \varepsilon$: dalla disuguaglianza triangolare risulta

$$|(a_k + b_k) - (A + B)| \leq |a_k - A| + |b_k - B|$$
Tenuto conto che per i due addendi a secondo membro esistono due soglie n_a, n_b tali che

$$\forall k \geq n_a \quad |a_k - A| \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

$$\forall k \geq n_b \quad |b_k - B| \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon$$
si riconosce che detto $n_\varepsilon = \max\{n_a, n_b\}$

$$\forall n \geq n_\varepsilon : \; |(a_k + b_k) - (A + B)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

$\boxed{\text{Prodotto:}}$

Scelto $\varepsilon > 0$ valutiamo se esista una soglia n_ε oltre la quale riesca $|a_k.b_k - A.B| \leq \varepsilon$: dalla disuguaglianza triangolare risulta

$$|a_k b_k - A.B| = |a_k b_k - A b_k + A b_k - A.B| \leq |a_k - A||b_k| + |A||b_k - B|$$
Tenuto conto che per i due addendi a secondo membro esistono due soglie $\overline{n}_a$, $\overline{n}_b$ tali che

$$\forall k \geq \overline{n}_a \quad |a_k - A| \leq \sigma$$

$$\forall k \geq \overline{n}_b \quad |b_k - B| \leq \sigma$$

$$\forall k \geq \overline{n}_b \quad |b_k| \leq |B| + \sigma$$

si riconosce che detto $n_\varepsilon = \max\{\overline{n}_a, \overline{n}_b\}$ riesce

$$|a_k b_k - A.B| \leq \sigma.(|B| + \sigma) + |A|\sigma = ((|B| + \sigma) + |A|)\,\sigma$$

É evidente che σ puó essere stato scelto in modo che

$$(|B| + \sigma + |A|)\,\sigma \leq \varepsilon$$

da cui l'asserto

$$\forall k \geq n_\varepsilon : \quad |a_k b_k - A.B| \leq \varepsilon$$

$\square$

Proposizione 7.4. *Sia* $\{a_1, a_2, \dots\}$ *una successione a termini non nulli, convergente al limite* $A \neq 0$*: allora la successione*

$$\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots\right\}$$

é convergente al limite $1/A$.

Dimostrazione. Scelto $\varepsilon > 0$ valutiamo se esista una soglia n_ε oltre la quale riesca

$$\left|\frac{1}{a_k} - \frac{1}{A}\right| \leq \varepsilon$$

Sia n_a una soglia tale che

$$\forall k \geq n_a : \;\; |a_k - A| \leq \sigma, \quad |a_k| \geq |A| - \sigma > 0$$

Sviluppando la differenza si ha

$$\left|\frac{1}{a_k} - \frac{1}{A}\right| = \frac{|a_k - A|}{|a_k||A|}$$

ne segue

$$\forall k \geq n_a : \;\; \frac{|a_k - A|}{|a_k||A|} \leq \frac{\sigma}{|A|(|A| - \sigma)}$$

É evidente che σ puó essere scelto in modo che

$$\frac{\sigma}{|A|(|A| - \sigma)} \leq \varepsilon$$

Si ha pertanto

$$\forall k \geq n_a : \;\; \left|\frac{1}{a_k} - \frac{1}{A}\right| \leq \varepsilon$$

□

Corollario 7.5. *Siano $\{a_1, a_2, ...\}$ e $\{b_1, b_2, \dots\}$ due successioni convergenti rispettivamente ad A e a $B \neq 0$, la seconda inoltre abbia i termini diversi da zero: allora la successione quoziente $\{a_1/b_1,\ a_2/b_2, \dots\}$ é convergente al limite A/B.*

Dimostrazione. É una immediata conseguenza delle due Proposizioni precedenti: la successione $\{1/b_1, 1/b_2, ...\}$ converge a $1/B$: il resto segue dal risultato relativo al prodotto di due successioni convergenti. □

Corollario 7.6. *Sia $P(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_1 x + p_0$ un polinomio e sia $\{a_1,\ a_2,\ a_3, \dots\}$ una successione convergente ad A: la successione*

$$P(a_1),\ P(a_2),\ P(a_3), \dots$$

é convergente a $P(A)$.

Osservazione 7.7. *Un risultato analogo, riferito ad un'espressione razionale $R(x) = P(x)/Q(x)$*

$$\{R(a_1),\ R(a_2),\ R(a_3), \dots\} \qquad \lim_{k\to\infty} R(a_k) = R(A)$$

si ottiene con l'ovvia prudenza che

- *i termini $Q(a_k) \neq 0$*
- *il valore $Q(A) \neq 0$.*

Proposizione 7.8 (Teorema della permanenza del segno)**.** *Sia $\{a_1,\ a_2,\ \dots\}$ una successione convergente di numeri $a_k \geq 0$: riesce*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = A \geq 0$$

Dimostrazione. Ammettiamo per assurdo che riesca $A < 0$: scelto ε tale che $[A - \varepsilon,\ A + \varepsilon]$ sia interamente contenuto nei negativi esisterebbe una soglia n_ε tale che

$$\forall k \geq n_\varepsilon : \quad a_k \in [A - \varepsilon,\ A + \varepsilon] \quad \to \quad a_k < 0$$

contrariamente all'ipotesi $a_k \geq 0\ \forall k$. □

Teorema 7.9 (Monotonia del limite)**.** *Siano* $\{a_1,\, a_2,\, \dots\}$ *e* $\{b_1,\, b_2,\, \dots\}$ *due successioni convergenti tali che*

$$\forall k : \;\; a_k \leq b_k$$

allora detti A *e* B *i loro limiti riesce* $A \leq B$*.*

Dimostrazione. La successione $\{b_1 - a_1,\, b_2 - a_2,\, \dots\}$ ha i termini non negativi e converge a $B - A$ che, pertanto sará non negativo, da cui

$$A \leq B$$

□

Proposizione 7.10 (Teorema dei carabinieri)**.** *Siano* $\{a_1, a_2, \dots\}$, $\{b_1, b_2, \dots\}$, $\{c_1, c_2, \dots\}$ *tre successioni tali che*

- $\forall k : \;\; a_k \leq b_k \leq c_k$
- *la* $\{a_1, a_2, \dots\}$ *e la* $\{c_1, c_2, \dots\}$ *siano convergenti allo stesso limite* L*,*

allora anche la $\{b_1, b_2, \dots\}$ *é convergente a* L*.*

Dimostrazione. Comunque si scelga $\varepsilon > 0$ esistono due soglie n_a ed n_c tali che

$$\begin{cases} \forall k \geq n_a & |a_k - L| \leq \varepsilon \quad \to \quad L - \varepsilon \leq a_k \\ \forall k \geq n_c & |c_k - L| \leq \varepsilon \quad \to \quad c_k \leq L + \varepsilon \end{cases}$$

da cui, posto $n_\varepsilon = \max(n_a, n_c)$

$$\forall k \geq n_\varepsilon : \quad \to \quad L - \varepsilon \leq a_k \leq b_k \leq c_k \leq L + \varepsilon \quad \to \quad |b_k - L| \leq \varepsilon$$

□

7.2. Le serie.

Assegnata una successione $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ si puó considerare la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

intendendo con tale notazione null'altro che la considerazione della nuova successione, detta delle somme parziali,

$$\begin{array}{l} S_1 = a_1 \\ S_2 = a_1 + a_2 \\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ \dots \\ S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \end{array}$$

Proposizione 7.11. *Le successioni monotone crescenti sono tutte e sole le somme parziali di serie a termini positivi o nulli.*

Dimostrazione. Se i termini della serie sono positivi o nulli piú termini si sommano piú sono grandi le somme, ovvero

$$\forall n : \quad S_n \leq S_{n+1}$$

Viceversa assegnata una successione $\{b_1, b_2, \dots\}$ monotona crescente, consideriamo la serie determinata dai termini

$$a_1 = b_1, \; a_2 = b_2 - b_1, \; a_3 = b_3 - b_2, \dots$$

É chiaro $a_k \geq 0$ e

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = b_n$$

□

Definizione 7.12. *Una serie si dice convergente se la successione delle somme parziali é convergente.*
Il limite delle somme parziali si assume come somma della serie.

Esempio 7.13. *Consideriamo la serie detta geometrica determinata dalla successione di addendi*

$$\{1, q, q^2, q^3, \dots\}$$

Posto

$$S_n = 1+q+q^2+\dots+q^{n-1}+q^n = 1+q(1+q+\dots+q^{n-1} = 1+q(S_n-q^n)$$

da cui

$$S_n(1-q) = 1 - q^{n+1}) \quad \rightarrow \quad S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

É evidente che se $|q| < 1$ la successione delle somme parziali $\{S_n\}$ é convergente a

$$\frac{1}{1-q}$$

valore che rappresenta la somma della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$