ANALISI

Argomenti della Lezione

20 ottobre 2011

8. Estremo superiore

Teorema 8.1. *Ogni insieme E superiormente limitato e non vuoto ammette estremo superiore.*

Dimostrazione. Siano $a_1 \in E$ e b_1 un maggiorante di E: detto c il punto medio tra a_1 e b_1 poniamo

$$\begin{cases} \textit{se } c \textit{ riesce maggiorante di } E & a_2 = a_1, \quad b_2 = c \\ \textit{se } c \textit{ non riesce maggiorante di } E & a_2 = c, \quad b_2 = b_1 \end{cases}$$

Iteriamo il procedimento che da $[a_1, b_1]$ ha condotto a scegliere come $[a_2, b_2]$ una delle due metá in cui l'intervallo era suddiviso da c, al nuovo intervallo $[a_2, b_2]$ pervenendo ad un terzo intervallo $[a_3, b_3]$, ecc.
La successione di intervalli $\{[a_n, b_n]\}$ che si costruisce ha le seguenti proprietá

- gli intervalli $[a_n, b_n]$ sono chiusi, limitati e non vuoti,
- l'estremo sinistro a_n non é un maggiorante di E mentre l'estremo destro b_n lo é,
- costituiscono una successione di intervalli incapsulati

$$[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$$

- per l'assioma degli intervalli incapsulati, soddisfatto nell'ambito dei numeri reali, hanno intersezione non vuota

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

- tenuto conto che gli intervalli $[a_n, b_n]$ hanno lunghezze

$$\frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$$

  via via piú piccole si riconosce che l'intersezione contiene un solo numero

$$\Lambda \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$$

Riesce

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \Lambda = \lim_{n\to\infty} b_n$$

infatti

$$\Lambda \in [a_n, b_n] \quad \to \quad |a_n - \Lambda| \leq |b_n - a_n| = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$$

$$\Lambda \in [a_n, b_n] \quad \to \quad |b_n - \Lambda| \leq |b_n - a_n| = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$$

ovvero, tenuto conto che i numeri

$$\frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$$

hanno limite zero, si riconosce che il numero Λ verifica le proprietá di limite sia relativamente alla successione $\{a_1, a_2, \dots\}$ che a quella $\{b_1, b_2, \dots\}$

Occorre ora riconoscere al numero Λ le due proprietá caratteristiche dell'estremo superiore di E:

- Λ é un maggiorante di E,
- é il maggiorante piú piccolo.

$\boxed{\Lambda \text{ é un maggiorante di } E}$

Qualunque sia $e \in E$ riesce

$$\forall n: \ \ e \leq b_n \quad \to \quad e \leq \lim_{n\to\infty} b_n \quad \to \quad e \leq \Lambda$$

$\boxed{\Lambda \text{ é il maggiorante piú piccolo.}}$

Prendiamo un qualsiasi $\Lambda' < \Lambda$: tenuto conto che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \Lambda$$

esisterá una soglia $\overline{n}$ tale che

$$\forall k \geq \overline{n}: \ \ \Lambda' < a_k$$

I numeri a_k non sono maggioranti di E: cioé per ogni a_k esiste qualche $e_k \in E$ tale che

$$a_k < e_k$$

Ma allora

$$\Lambda' < a_k < e_k$$

ovvero Λ' non é un maggiorante di E.
Quindi Λ era il piú piccolo.

$\square$

8.1. Le successioni monotone.

Teorema 8.2 (Regolaritá delle successioni monotone)**.** *Ogni successione* $\{a_1, a_2, ...\}$ *monotona crescente, superiormente limitata é convergente.*
Detto $\Lambda = \sup\{a_1, a_2, ...\}$ *riesce*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \Lambda$$

Dimostrazione. Sia Λ l'estremo superiore dell'insieme superiormente limitato costituito dai valori della successione $\{a_1, a_2, ...\}$.
Dobbiamo poter provare che Λ verifica le proprietá di limite in relazione alla $\{a_1, a_2, ...\}$.
Scelto ε dobbiamo riconoscere che esiste una soglia n_ε oltre la quale risultano soddisfatte tutte le disuguaglianze $|a_k - \Lambda| \leq \varepsilon$.

Consideriamo il numero $\Lambda - \varepsilon$: esso, essendo minore di Λ non é un maggiorante per l'insieme dei valori della successione, ovvero esiste un

$$a_{n_\varepsilon}$$

maggiore di $\Lambda - \varepsilon$.

$$a_{n_\varepsilon} \in [\Lambda - \varepsilon,\ \Lambda + \varepsilon]$$

Tenuto conto che la successione $\{a_1, a_2, ...\}$ é monotona crescente riesce

$$\forall k \geq n_\varepsilon : \quad \begin{cases} a_{n_\varepsilon} \leq a_k, \\ a_k \leq \Lambda \end{cases} \quad \to \quad a_k \in [a_{n_\varepsilon}, \Lambda]$$

ovvero

$$\forall k \geq n_\varepsilon : \quad |a_k - \Lambda| \leq \varepsilon$$

□

8.2. Il numero e di Nepero.

Osservazione 8.3 (The compound-interest problem)**.** Jacob Bernoulli*(1759 - 1789) discovered this constant by studying a question about compound interest.*
One example is an account that starts with 1.00 *and pays 100 percent interest per year.*
If the interest is credited once, at the end of the year, the value is 2.00.

But if the interest is computed and added twice in the year, the 1 *is multiplied by* $1.5 = (1 + 1/2)$ *twice, yielding*

$$1.00 \times \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25$$

Compounding quarterly yields $1.00 \times 1.25^4 = 1.00 \times \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 2.4414\ldots$*,*

and compounding monthly yields $1.00 \times \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} == 2.613035\ldots.$
Bernoulli noticed that this sequence approaches a limit for more and smaller compounding intervals.
Compounding weekly yields 2.692597*, while compounding daily yields* 2.714567*, just two cents more...*

http://en.wikipedia.org/wiki/E_(mathematical_constant)

Teorema 8.4. *La successione*

$$\left\{2, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4, \ldots\right\}$$

é convergente.

Dimostrazione. Il risultato sará riconosciuto dopo aver accertato che la successione data é

- monotona crescente,
- superiormente limitata.

$\boxed{\text{Monotonia}}$

Ricordiamo la formula del binomio di Newton

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \to \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

Tenuto presente che

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$$

riesce

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(\frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} ... \frac{n-k+1}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) ... \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

Tale espressione rende evidente che

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Infatti esprimendo come sopra il termine a secondo membro si riconoscono in esso

- $n+2$ addendi invece di $n+1$, un addendo in piú,
- i primi $n+1$ addendi piú grandi, per via del denominatore del termine a sottrarre passato da n a $n+1$

$\boxed{\text{Limitatezza}}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}$$

Tenuto presente che

$$1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k} = 1+\frac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}} \leq 3$$

La successione

$$\left\{2,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^3,\ \left(1+\frac{1}{4}\right)^4,\ \dots\right\}$$

monotona crescente e superiormente limitata é convergente.
Il suo limite ha il nome e ed é detto costante di Nepero.
É evidente che $e \in [0,3]$, $e \in [2,3]$,

$$\forall n: \quad e \in \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, 3\right]$$

Sono state prodotte approssimazioni raffinatissime di e, cioé con migliaia di decimali, come del resto é stato fatto per π.
É abbastanza facile riconoscere (per una via diversa da quella ora seguita) che e é irrazionale. $\square$