ANALISI

Argomenti della Lezione

26 ottobre 2011

10. Forme indeterminate

10.1. GLOSSARIO.

Tra le successioni non convergenti si distinguono alcuni tipi particolari:

- le successioni *divergenti positivamente*:

  $$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_M :\ n \geq n_M \quad \to \quad a_n \geq M$$

  La successione dei numeri naturali é divergente positivamente.

  Per le successioni divergenti positivamente si usa la notazione

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

- quelle *divergenti negativamente*

  $$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_M :\ n \geq n_M \quad \to \quad a_n \leq M$$

  La successione degli interi negativi é divergente negativamente.

  Per le successioni divergenti negativamente si usa la notazione

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

- quelle *divergenti in modulo*

  $$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_M :\ n \geq n_M \quad \to \quad |a_n| \geq M$$

  La successione

  $$\{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), 2\cos\left(2\frac{\pi}{4}\right), 3\cos\left(3\frac{\pi}{4}\right), 4\cos\left(4\frac{\pi}{4}\right), \dots\}$$

  é divergente in modulo.

Definizione 10.1. *Le successioni convergenti a zero si dicono* successioni infinitesime.

Definizione 10.2. *Le successioni convergenti, quelle divergenti positivamente e quelle divergenti negativamente si dicono successioni regolari.*

Corollario 10.3. *Le successioni monotone sono regolari.*

Osservazione 10.4. *Una successione non convergente non é necessariamente una successione divergente, si pensi, ad esempio a*

$$\{1,\ -1,\ 1,\ -1, \ldots\}$$

Una successione divergente positivamente é anche divergente in modulo, una divergente negativamente é anch'essa divergente in modulo, mentre una successione divergente in modulo puó non essere divergente né positivamente né negativamente, si pensi a

$$\{1,\ -2,\ 3,\ -4,\ 5,\ -6, \ldots\}$$

Assegnate due successioni regolari se ne costruiscono altre con le ordinarie operazioni aritmetiche di somma, differenza, prodotto e quoziente. Spesso si riconosce la regolaritá di queste nuove e il valore del loro limite, somma, differenza, prodotto e quoziente dei limiti delle due iniziali.
Sfuggono a questi casi i seguenti che si ricordano facilmente con i seguenti richiami tipografici

$$\boxed{\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0\,.\,\infty, \quad \infty - \infty}$$

detti *forme indeterminate*.

10.2. Rapporto di due successioni. Assegnate due successioni $\{a_1,\, a_2, \ldots\}$ e $\{b_1,\, b_2, \ldots\}$, se i termini della seconda sono diversi da zero, si puó considerare la successione quoziente

$$\left\{\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2}, \ldots\right\}$$

- se le due successioni sono convergenti rispettivamente ad A e a $B \neq 0$ allora la successione quoziente é convergente a A/B,
- se $A \neq 0$ e $B = 0$ la successione quoziente é divergente in modulo: se inoltre i suoi termini sono definitivamente positivi allora la successione quoziente diverge positivamente, se i suoi termini sono definitivamente negativi allora la successione quoziente diverge negativamente,
- se $A = B = 0$ oppure se entrambe le successioni $\{a_1,\, a_2, \ldots\}$ e $\{b_1,\, b_2, \ldots\}$ sono divergenti in modulo si parla di *forme indeterminate*

$$\boxed{\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}}$$

Il termine *forme indeterminate* significa che la successione quoziente puó essere, nel caso di due successioni infinitesime o due successioni divergenti in modulo,

- convergente,
- divergente,
- non convergente.

10.3. Esempi.

- Quoziente di due infinitesime:

$$\frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}}, \quad \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n}}, \quad \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}$$

- Quoziente di due divergenti:

$$\frac{n+1}{n+2}, \quad \frac{n^2+1}{n+2}, \quad \frac{n+1}{n^2+2}$$

- Quoziente di due infinitesime o di due divergenti:

$$\frac{1/n}{(-1)^n/n}, \quad \frac{n}{(-1)^n n}$$

10.4. Ordine di infinitesimo, ordine di infinito.

Definizione 10.5. *Siano $\{a_1, a_2, \dots\}$ e $\{b_1, b_2, \dots\}$ due successioni infinitesime: si dice che*

- *$\{a_1, a_2, \dots\}$ é infinitesimo di ordine superiore a $\{b_1, b_2, \dots\}$ se la successione quoziente $\{a_n/b_n\}$ é infinitesima,*
- *$\{a_1, a_2, \dots\}$ é infinitesimo dello stesso ordine di $\{b_1, b_2, \dots\}$ se la successione quoziente $\{a_n/b_n\}$ é convergente a $\ell \neq 0$,*
- *$\{a_1, a_2, \dots\}$ é infinitesimo di ordine inferiore a $\{b_1, b_2, \dots\}$ se la successione quoziente $\{a_n/b_n\}$ é divergente in modulo.*

Definizione 10.6. *Siano $\{a_1, a_2, \dots\}$ e $\{b_1, b_2, \dots\}$ due successioni divergenti in modulo: si dice che*

- *$\{a_1, a_2, \dots\}$ é infinita di ordine superiore a $\{b_1, b_2, \dots\}$ se la successione quoziente $\{a_n/b_n\}$ é divergente in modulo,*
- *$\{a_1, a_2, \dots\}$ é infinita dello stesso ordine di $\{b_1, b_2, \dots\}$ se la successione quoziente $\{a_n/b_n\}$ é convergente,*

- $\{a_1, a_2, \dots\}$ *é infinita di ordine inferiore a* $\{b_1, b_2, \dots\}$ *se la successione quoziente* $\{a_n/b_n\}$ *é divergente in modulo.*

10.5. La conclusione.

Il quoziente di due infinitesime o di due divergenti non dipende tanto dal loro essere infinitesime o divergenti quanto dalla rapiditá con cui i termini delle due successioni si avvicinano a zero o divergono.

A tale scopo é utile disporre di una sorta di catalogo della rapiditá con cui alcune successioni si avvicinano a zero, ovvero divergono.
I segni $\geq$ o $\leq$ con le quali le colleghiamo indica semplicemente la maggiore rapiditá con cui si avvicinano a zero o con la quale divergono:

$$\frac{1}{\log(n)} \geq \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n^2}, \dots \geq \frac{1}{(1+h)^n}$$

$$\log(n) \leq n \leq n^2 \dots \leq (1+h)^n$$

Osservazione 10.7. *L'ordinamento indicato qui sopra é un ordinamento* non archimedeo*: l'ordine con cui la successione* $\{n\}$ *dei naturali diverge é minore di quello con cui diverge la* $\{n^2\}$.
Ebbene qualunque multiplo della prima $\{\lambda n\}$ *continua ad avere ordine di divergenza inferiore all'ordine di* $\{n^2\}$.

10.6. Somme e differenze.

Un problema analogo ai quozienti si incontra nelle somme o differenze di successioni divergenti in modulo:

- é ovvio che la somma di due successioni divergenti entrambe positivamente o entrambe negativamente diverge allo stesso modo,
- é ovvio che la differenza di due successioni la prima divergente positivamente la seconda negativamente diverge positivamente.

Una gestione possibile per decidere circa la successione $\{a_n + b_n\}$ é offerta dalla formula

$$a_n + b_n = a_n \left(1 + \frac{b_n}{a_n}\right)$$

tramite la quale la conoscenza dell'eventuale limite del quoziente $\{b_n/a_n\}$ permette di valutare il limite della somma $\{a_n + b_n\}$.

10.7. Ordine di una somma.

L'ordine di grandezza di una somma di due successioni divergenti in modulo dipende, ove diverga, dall'addendo di ordine piú alto.
Si consideri ad esempio la somma

$$\{2n + 3n^2\}$$

l'ordine di infinito é quello del termine $3n^2$: infatti

$$2n + 3n^2 = 3n^2 \left\{ \frac{2}{3n} + 1 \right\} \approx 3n^2$$

10.8. Esempi tratti dal Foglio 3.