ANALISI

Argomenti della Lezione

27 ottobre 2011

11. Serie

11.1. Somma di una serie.

Una serie, tradizionalmente indicata con il simbolo tipografico

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

rappresenta la successione delle somme parziali

$$\{S_n\}: \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Nel caso in cui la successione delle somme parziali sia convergente il valore S del suo limite viene detto somma della serie

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Proposizione 11.1. *Le serie che abbiano termini $a_k \neq 0$ solo per un numero finito di indici sono convergenti.*

11.2. La serie geometrica.

La serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

si dice serie geometrica di ragione q.
Le somme parziali sono, nel caso della serie geometrica, con $q \neq 1$ espresse molto semplicemente da

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Nel caso $q = 1$ valgono invece n.
É quindi molto facile riconoscere che

- se $|q| < 1$ la serie geometrica converge e ha somma
$$\frac{1}{1-q}$$
- se $|q| \geq 1$ la serie geometrica non converge.

11.3. Carattere infinitesimo dei termini.

Teorema 11.2. *Se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ é convergente allora i suoi termini costituiscono una successione infinitesima.*

DIMOSTRAZIONE. Sia

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad \to \quad a_n = S_{n-1} - S_n \quad \to$$

$$\to \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0$$

□

Il teorema é utile sostanzialmente in negativo:

se i termini $\{a_n\}$ non costituiscono una successione infinitesima la serie da essi determinata non é convergente.

11.4. Un contresempio.

Il fatto che i termini $\{a_n\}$ costituiscono una successione infinitesima non é sufficiente a dedurne che la serie da essi costituita sia convergente.
Si consideri la successione

$$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots\}$$

La successione delle somme parziali é monotona crescente ma non limitata superiormente infatti

$$S_1 = 1, S_3 = 2, S_6 = 3, S_{10} = 4, \dots$$

11.5. Serie a termini positivi.

Proposizione 11.3 (Il criterio del confronto)**.** *Siano*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

due serie a termini positivi che soddisfino

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad 0 \le a_k \le b_k$$

allora

- *se la serie dei b_k converge allora converge anche quella degli a_k*
- *se la serie degli a_k diverge allora diverge anche quella dei b_k.*

DIMOSTRAZIONE. La serie dei $\{b_k\}$ si dice maggiorante della serie degli $\{a_k\}$.
Indichiamo le rispettive somme parziali

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

Sia la $\{A_n\}$ che la $\{B_n\}$ sono monotone crescenti e riesce

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad A_n \leq B_n$$

- Se la successione $\{B_n\}$ converge allora é superiormente limitata $B_n \leq M$ e quindi di conseguenza é superiormente limitata anche la successione $\{A_n\}$ che pertanto é convergente anch'essa.
- Se la successione $\{A_n\}$ non é convergente, quindi essendo monotona crescente, é illimitata superiormente, allora anche la $\{B_n\}$ é illimitata superiormente e quindi non convergente.

□

É molto frequente riconoscere la convergenza di una serie a termini positivi per confronto con un'altra serie

- sua maggiorante,
- e nota come serie convergente.

Le serie convergenti piú spesso usate in tale tecnica di confronto sono le serie geometriche di ragione $q \in (0, 1)$.

Corollario 11.4. *Se la serie* $\sum b_k$ *é convergente e se i rapporti*

$$\frac{a_k}{b_k}$$

costituiscono una successione limitata allora anche la serie $\sum a_k$ *é convergente.*

Proposizione 11.5 (Il criterio del rapporto)**.** *La serie a termini positivi* $\sum a_k$ *é convergente se la successione dei rapporti*

$$\{\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \frac{a_4}{a_3}, \frac{a_5}{a_4}, \frac{a_6}{a_5}, \dots\}$$

é limitata da un numero $q < 1$*.*

Dimostrazione.

$$
\begin{array}{lcl}
\frac{a_2}{a_1}, \leq q & \rightarrow & a_2 \leq q a_1 \\
\frac{a_3}{a_2}, \leq q & \rightarrow & a_3 \leq q^2 a_1 \\
\frac{a_4}{a_3}, \leq q & \rightarrow & a_4 \leq q^3 a_1 \\
\dots & \dots & \\
\frac{a_n}{a_{n-1}}, \leq q & \rightarrow & a_n \leq q^{n-1} a_1
\end{array}
$$

Ne segue che la serie

$$a_1 \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

convergente in quanto serie geometrica di ragione $q < 1$ é maggiorante la serie data.
Quindi, per confronto, si riconosce che la serie data é convergente. □

Corollario 11.6. *La serie a termini positivi* $\{a_1, a_2, ...\}$ *é convergente se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell < 1$$

Dimostrazione. Il fatto che la successione dei rapporti abbia limite $\ell < 1$ implica che tali rapporti appartengano da un certo indice in poi all'intervallo

$$(\ell - \varepsilon,\, \ell + \varepsilon), \qquad \ell + \varepsilon < 1$$

e quindi che da tale indice in poi riesca

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \ell + \varepsilon < 1$$

□

11.6. La convergenza assoluta.

(vedi Lezione del **21 ottobre**)

11.7. La serie esponenziale.

Si chiama serie esponenziale la seguente

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Per decidere per quali x sia convergente:

- consideriamo la serie dei moduli

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!}$$

- ad essa applichiamo il criterio del rapporto

$$\frac{\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{|x|^k}{k!}} = \frac{|x|}{k+1}$$

- Tenuto conto che tali rapporti costituiscono una successione infinitesima, essi saranno, qualunque sia la scelta di x, definitivamente minori di $1/2$, garantendo quindi che la serie dei moduli sia assolutamente convergente.

L'assoluta convergenza implica, vedi Lezione 9, la convergenza della serie.

11.8. Le serie armoniche generalizzate.

Si chiamano serie armoniche generalizzate le

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Si tratta di serie a termini positivi.
Se $\alpha \leq 0$ i termini non sono infinitesimi, quindi la serie non puó convergere.

$\boxed{\alpha = 1}$

La serie assegnata, primo rigo, é maggiorante di quella del secondo rigo

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \dots \end{array}$$

Quella del secondo rigo é divergente

$$S_2 = 1, S_4 = 1.5, S_8 = 2, \dots$$

quindi é divergente anche la serie armonica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

Ne segue, per confronto che sono divergenti anche tutte le serie armoniche generalizzate relative ad esponenti $\alpha \leq 1$, in quanto maggioranti di quella relativa ad $\alpha = 1$.

Osservazione 11.7. *Nessun calcolatore sarebbe in grado di accorgersi del carattere divergente di tale serie: infatti superato un certo indice gli addendi* $1/n$ *sarebbero confusi dal calcolatore con lo zero-macchina e quindi la successione delle somme parziali risulterebbe dopo quell'indice costante, quindi convergente.*
La scoperta di serie a termini infinitesimi e tuttavia divergenti é un risultato matematico teorico, non numerico, cioé non sperimentabile.

$\boxed{\alpha > 1}$

Un confronto analogo al precedente consente di riconoscere la convergenza di quelle relative a $\alpha > 1$.
Consideriamo la successione delle loro somme parziali

$$\{S_n\}$$

Per riconoscere che essa é crescente occorre e basta riconoscere che sia limitata superiormente.
Per ottenere ció basta riconoscere che una sua sottosuccessione sia limitata superiormente.
Esaminiamo quella relativa agli indici potenze di 2

$$S_2,\ S_4,\ S_8,\ S_{16},\ \dots, S_{2^k}, \dots$$

L'intervallo di indici $h \in [2^k, 2^{k+1})$ contiene 2^k indici e riesce quindi

$$h \in (2^k, 2^{k+1}] \quad \rightarrow \quad \frac{1}{h^\alpha} \leq \frac{1}{2^{\alpha k}} \quad \rightarrow \quad S_{2^{k+1}} - S_{2^k} \leq \frac{2^k}{2^{\alpha k}} = \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k$$

Decomposto l'insieme di indici da 1 a $2^n - 1$ come

$$[1,2) \cup [2,4) \cup [4,8) \cup \dots [2^{n-1}, 2^n)$$

riesce

$$S_{2^n} = \sum_{h=1}^{2^n-1} \frac{1}{h^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{n-1}$$

da cui segue che la sottosuccessione considerata ha termini piú piccoli delle somme parziali della serie geometrica

$$\sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k$$

serie convergente...