ANALISI

Argomenti della Lezione

28 ottobre 2011

12. Serie numeriche

Il criterio di convergenza di Cauchy applicato alla successione delle somme parziali di una serie permette di riconoscere il seguente teorema

Teorema 12.1. *Sia*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

una serie convergente, allora scelto comunque $\varepsilon > 0$ esiste una soglia n_ε tale che

$$\forall p, q \in N, p, q \geq n_\varepsilon : \; R_{pq} = \left| \sum_{k=p+1}^{q} a_k \right| \leq \varepsilon$$

Viceversa se scelto comunque $\varepsilon > 0$ esiste una soglia n_ε tale che

$$\forall p, q \in N, p, q \geq n_\varepsilon : \; P_{pq} = \left| \sum_{k=p+1}^{q} a_k \right| \leq \varepsilon$$

allora la serie é convergente.

Dimostrazione. Basta applicare il criterio di convergenza di Cauchy alla successione $\{S_n\}$ delle somme parziali, tenendo conto che, per $q > p$ si ha

$$|S_q - S_p| = \left| \sum_{k=p+1}^{q} a_k \right|$$

□

12.1. Applicazione.

Decidere che una successione sia convergente é, al di fuori di casi particolarmente semplici, questione difficile.
Il legame tra successioni e serie consente tuttavia una strategia utile:

- sia assegnata la successione $\{a_1, a_2, \dots\}$ della quale si vuole esaminare l'eventuale convergenza,
- consideriamo la serie di addendi

$$\{a_1,\, a_2 - a_1,\, a_3 - a_2,\, a_4 - a_3, \dots\}$$

- Tenuto conto che la successione delle somme parziali di tale serie é esattamente la successione iniziale é chiaro che

- – convergenza della successione $\{a_1, a_2, \dots\}$
- – convergenza della serie $a_1 + \sum_{k=0}^{\infty} (a_{k+1} - a_k)$

sono la stessa cosa,

- Per la convergenza della serie si ha tuttavia qualche strumento in piú:
  - – considerare la serie dei moduli, serie a termini positivi,
  - – esaminare se c'é convergenza assoluta con criterio di confronto.

Esempio 12.2. *La successione* $\{a_1, a_2, \dots\}$ *sia tale che*

$$\forall n : \quad |a_{n+1} - a_n| \le M \, .q^n$$

con $q \in [0, 1)$.
Allora

- *La serie*
$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{k+1} - a_k|$$
é convergente per confronto con la serie geometrica convergente
$$M \sum_{k=1}^{\infty} q^k$$
- *quindi la successione* $\{a_1, a_2, \dots\}$ *é convergente.*

Esempio 12.3. *Si consideri la successione definita ricorsivamente da*

$$a_1 = A, \quad a_{n+1} = B + \frac{1}{2} a_n$$

essendo A *e* B *due costanti assegnate.*
Tenuto presente che

$$\begin{cases} a_{n+1} & = B + \frac{1}{2} a_n \\ \\ a_n & = B + \frac{1}{2} a_{n-1} \end{cases} \quad \to \quad |a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{2} |a_n - a_{n-1}|$$

Da cui

$$|a_{n+1} - a_n| \le \frac{1}{2^n} |a_2 - a_1| = |B - \frac{1}{2} A| \frac{1}{2^n}$$

Ne segue che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$$

é convergente.

Quindi é convergente anche la successione $\{a_1, a_2, \dots\}$.
Detto ℓ *il suo limite, dall'uguaglianza*

$$a_{n+1} = B + \frac{1}{2} a_n$$

segue prendendo il limite di primo e secondo membro

$$\ell = B + \frac{1}{2}\ell \quad \to \quad \ell = 2B$$

12.2. Serie prodotto.

Teorema 12.4. *Assegnate le due serie a termini positivi, convergenti*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = A, \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k = B$$

posto

$$c_k = \sum_{h=0}^{k} a_h b_{k-h}$$

la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

é convergente e ha somma A.B

Dimostrazione. Indichiamo con

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$$

Riesce, scegliendo ad esempio $n = 3$

$$C_3 = \sum_{k=0}^{3} c_k = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0) =$$

$$= a_3b_0 + a_2(b_0 + b_1) + a_1(b_0 + b_1 + b_2) + a_0(b_0 + b_1 + b_2 + b_3) = \sum_{k=0}^{3} a_{3-k} B_k$$

da cui si intuisce, in generale,

$$C_n = \sum_{h=0}^{n} c_h = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} B_j = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}\,(B_j - B) + B\,A_n$$

Tenuto conto che

- $$\lim_{n\to\infty} B\,A_n = B.A$$

- $$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}\,(B_j - B) = 0$$

si ha l'asserto.
Si noti che la seconda relazione di limite non é banale: in essa concorrono due fatti

- le differenze $B_j - B$ sono infinitesime per $j \to \infty$,
- i termini a_k sono infinitesimi per $k \to \infty$,
- le somme A_n sono limitate.

□

Esempio 12.5. *Il precedente risultato relativo alle serie prodotto permette, applicato alla serie esponenziale, di riconoscere che posto*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

riesce, per ogni x_1, $x_2 \geq 0$

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \,.\, f(x_2)$$

É questo il motivo per cui la somma della serie esponenziale si chiama....

...funzione esponenziale !