ANALISI

Argomenti della Lezione

3 novembre 2011

13. Limiti di funzioni

13.1. Limiti all'infinito. Sia

$$f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$$

ha senso cercare

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

Esso, se esiste,

- é un numero $\ell \in \mathbb{R}$
- ha la proprietá di limite

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in (a, +\infty) : \ x_\varepsilon \leq x \quad \to \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Il numero

$$\ell = \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

rappresenta quindi un valore verso il quale i risultati $f(x)$ si stabilizzano al crescere di x.

Una lettura ancora piú evidente si ottiene dando alla variabile x il significato t temporale: con tale lettura si puó dire

$$\ell = \lim_{t \to +\infty} f(t)$$

significa:

piú passa il tempo piú i valori $f(t)$ si stabilizzano sul valore ℓ

Esempio 13.1. *La funzione $f(x) = \sin(x)$ non ha limite per $x \to +\infty$, infatti la natura periodica (non costante) di $\sin(x)$ esclude la possibilitá che i suoi valori si stabilizzino, al crescere di x, su alcun valore ℓ.*

La funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2} \sin(x)$$

invece ha oscillazioni via via piú smorzate e ha, quindi, limite $\ell = 0$: infatti, scelto $0 < \varepsilon < 1$ riesce

$$|f(x) - \ell| = \frac{|\sin(x)|}{1 + x^2} \leq \frac{1}{1 + x^2} \leq \varepsilon$$

per ogni $x > 1/\varepsilon$.

Osservazione 13.2. *Quanto si é fatto per $x \to +\infty$ puó ripetersi relativamente a $x \to -\infty$: occorrerá, in questo secondo caso riferirsi naturalmente a funzioni definite in intervalli $(-\infty, a)$.*
Per il resto é tutto analogo

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$$

significa che

- *ℓ é un numero,*
- *é soddisfatta la proprietá di limite: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un punto x_ε tale che*

$$x \leq x_\varepsilon \quad \to \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Osservazione 13.3. *I limiti di una funzione sia per $x \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$ non differiscono molto da quelli introdotti per una successione: i valori della funzione (come era stato per quelli della successione) devono stabilizzarsi su un numero ℓ, dove la parola stabilizzarsi indica*

avvicinarsi sempre piú definitivamente

Avvicinarsi sempre piú *corrisponde al riconoscere la differenza*

$$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

il definitivamente *vuol dire che la disuguaglianza é soddisfatta da un certo x_ε in poi.*
Dove in poi *significa da quell'x_ε in avanti per il limite per $x \to +\infty$, da quell'x_ε indietro per il limite per $x \to -\infty$.*

13.2. Limite in un punto. La differenza sostanziale che intercorre tra le successioni $a_n = f(n)$

funzioni f definite sugli interi

e le funzioni $f(x)$ di una variabile reale consiste nella possibilitá di esaminare i valori che la funzione produce relativamente a punti x vicini ad un punto x_0 scelto.
La possibilitá di avvicinarsi con x a x_0 sulla retta reale non si ritrova sull'insieme dei numeri interi i quali distano fra loro almeno 1.
Il problema di limite in un punto x_0 per una funzione $f(x)$ definita in un intorno $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ di x_0 si pone piú o meno in questi termini

piú x si avvicina a x_0 piú i corrispondenti valori $f(x)$ si stabilizzano su un certo valore

La notazione tipografica usuale é la seguente

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

Si noti che:

- per parlare di limite di una funzione in un punto x_0 é indispensabile che essa sia definita in punti indefinitamente vicini a x_0,
- il limite sará un numero ℓ che gode della proprietá di limite: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una distanza δ_ε tale che
$$0 < |x - z_0| \leq \varepsilon \quad \to \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$
Si noti che il considerare punti x che verifichino la condizione
$$0 < |x - x_0|$$
é null'altro che considerare punti **distinti** da x_0.
Condizione particolarmente importante nei casi in cui x_0 sia un punto su cui la funzione non é definita.

Esempio 13.4. *Non ha senso cercare il limite della funzione* $\sqrt{x}$ *nel punto* $x_0 = -1$*: infatti la funzione, definita per* $x \geq 0$ *non é definita nei punti vicini a* -1.

Ha senso cercare il limite nel punto $x_0 = 0$ *della funzione*
$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$
infatti essa é definita in $x \neq 0$ *e quindi é definita nei punti vicini a* $x_0 = 0$*: che i valori prodotti da* $f(x)$ *si stabilizzino é evidentemente falso.*
Essi diventano semplicemente sempre piğrandi: quindi é facile rispondere che non esiste il limite di tale $f(x)$ *per* $x \to 0$.

Ha senso cercare il limite nel punto $x_0 = 0$ *della funzione*
$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$
infatti essa é definita in $x \neq 0$ *e quindi é definita nei punti vicini a* $x_0 = 0$*: che i valori prodotti da* $f(x)$ *si stabilizzino o meno su un numero* ℓ *non é ovvio, ma puó essere esaminato con interesse.*

13.3. Limite destro e sinistro. L'esistenza del limite
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$
puó essere attenuata nelle due condizioni, tipograficamente indicate con
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_-, \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_+$$
che corrispondono a due avvicinamenti ad x_0 particolari

- quello da sinistra $x \to x_0^-$,

- quello da destra $x \to x_0^+$.

L'esistenza del limite da sinistra ℓ_- vuol dire

- che ℓ_- é un numero,
- che gode della seguente proprietá di limite attenuata: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una distanza δ_ε tale che **per ogni x a sinistra di x_0**

$$0 < |x - x_0| \leq \varepsilon \quad \to \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

L'esistenza del limite da destra ℓ_+ vuol dire

- che ℓ_+ é un numero,
- che gode della seguente proprietá di limite attenuata: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una distanza δ_ε tale che **per ogni x a destra di x_0**

$$0 < |x - x_0| \leq \varepsilon \quad \to \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Osservazione 13.5. *L'esistenza del limite, senza altri aggettivi, é la condizione piú forte*

$$\ell = \lim_{x \to x_0} f(x) \quad \to \quad \begin{cases} \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \\ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \end{cases}$$

L'esistenza dei due limiti da sinistra e da destra o di uno solo dei due corrisponde a una stabilizzazione dei valori $f(x)$ per $x \approx x_0$ piú debole.

13.4. Idee naif e situazioni concrete. L'esistenza del limite di $f(x)$ in un punto x_0 coincide spesso, almeno relativamente alle funzioni $f(x)$ piú comuni, con il valore stesso $f(x_0)$ della funzione nel punto x_0. Questo accade, ad esempio, per la funzione $f(x) = x^2$: riesce infatti

$$\lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$$

Infatti

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0|$$

permette di riconoscere che

$$x \approx x_0 \quad \to \quad x^2 \approx x_0^2 \quad \to \quad f(x) \approx f(x_0)$$

La situazione cambia notevolmente se ci riferiamo, ad esempio, alla funzione parte intera[1]

$$f(x) = [x]$$

---

[1] In GnuPlot, in GeoGebra, come pure in molti altri software in uso, la funzione parte intera si chiama `floor(x)`

Scelto $x_0 = 0.7$ si riconosce facilmente che nei punti $x \approx 0.7$, ad esempio per $x \in (0.6,\, 0.8)$ la funzione parte intera produce addirittura sempre lo stesso valore, lo zero, che coincide anche con $f(0.7)$.
Scelto invece $x_0 = 1$ le cose cambiano: avvicinandosi a x_0 da sinistra, $x \in (0, 1)$, si producono con la parte intera tutti valori zero.
Avvicinandosi invece dalla parte destra, $x \in (1, 2)$ si ottengono sempre valori 1.
Non c'é quindi stabilizzazione dei valori $f(x)$ per $x \approx 1$, ovvero non esiste il limite di $f(x) = [x]$ nel punto $x_0 = 1$

Quanto osservato permette di concludere che

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$$

esistono sia il limite da sinistra che quello da destra, ma sono diversi.