ANALISI

Argomenti della Lezione

9 novembre 2011

15. Limiti notevoli

15.1. Alcuni limiti notevoli.

Il titolo *limiti notevoli* si riferisce al fatto che tali limiti intervengono frequentemente in numerose questioni: si tratta comunque di procedimenti non banali, nel senso che si presentano, in genere, come quozienti di infinitesimi.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}}$$

Si tratta, in termini aristocratici, della ben nota accezione della lunghezza della circonferenza di raggio 1 intesa come intermedia tra quella dei poligoni regolari inscritti e di quelli circoscritti.
Detto x l'angolo, la relazione precedente, vedi Figura 1 implica

$$2\sin(x) \leq 2x \leq 2\tan(x)$$

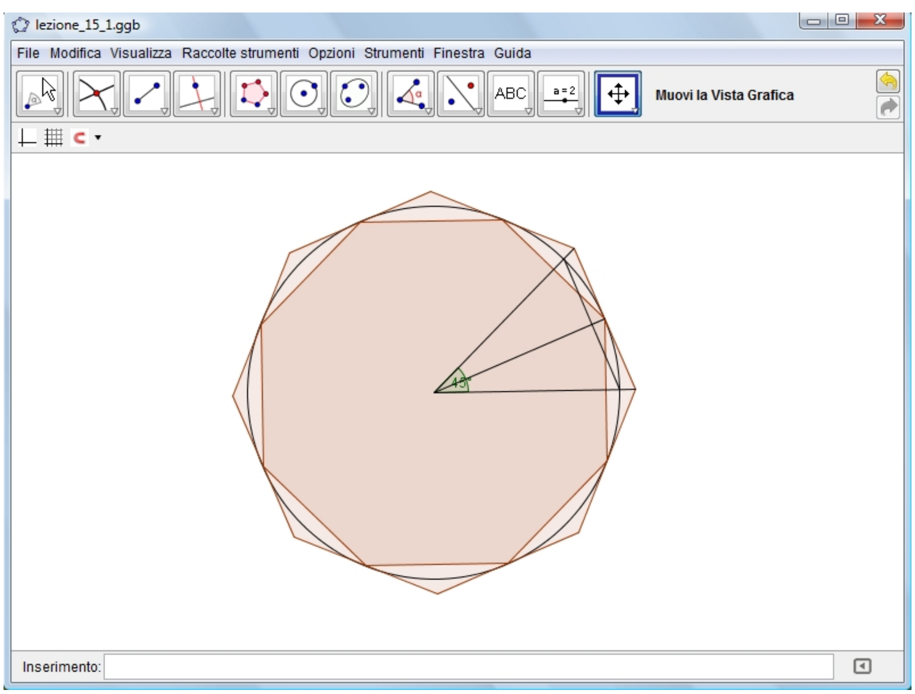

Figura 1. poligoni inscritti e circoscritti

La ben nota disuguaglianza

$$\sin(x) \leq x \leq \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

implica, per $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, e quindi per $\sin(x) > 0$

$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

da cui, passando al limite per $x \to 0^+$ si ha

$$1 \leq \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin(x)} \leq 1 \quad \to \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Tenuto conto del resto che

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin(x)}{x}$$

si riconosce che il limite da destra e quello da sinistra sono uguali e quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Tenuto presente che

$$1 - \cos(x) = \frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{1+\cos(x)} = \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$$

da cui

$$x \approx 0 \quad \to \quad 1 - \cos(x) \approx \frac{1}{2}\sin^2(x)$$

si riconosce che

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x(1+\cos(x))} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} = \frac{1}{2}$$

Osservazione 15.1. *La disponibilitá di un limite offre possibilitá di tipo numerico*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad x \approx 0 \quad \to \quad 0.5 \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1.5$$

Dal punto di vista grafico tale condizione implica che il grafico di $\sin(x)$ *in prossimitá di* $x = 0$ *é contenuto tra le due rette*

$$y = 0.5x, \quad y = 1.5x$$

Analoga informazione per l'altro limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}\quad x\approx 0\quad\to\quad 0\le\frac{1-\cos(x)}{x^2}\le 1$$

ovvero

$$\exists\delta>0:|x|\le\delta\quad\to\quad 1-x^2\le\cos(x)\le 1$$

Stima che puó essere ulteriormente migliorata tenendo presente che in un intervallo intorno all'origine forse anche piú stretto riuscirá anche

$$0.25\le\frac{1-\cos(x)}{x^2}\le 0.75$$

disuguaglianza che implica che il grafico di $\cos(x)$ *finisce per giacere fra le due parabole*

$$y=1-0.25x^2,\quad y=1-0.75x^2$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}}$$

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\quad\to\quad e^x=\lim_{n\to\infty}\{1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}\}$$

da cui

$$e^x-1=\lim_{n\to\infty}\{x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}\}=x\lim_{n\to\infty}\{1+\frac{x}{2!}+...+\frac{x^{n-1}}{n!}\}$$

ovvero

$$\frac{e^x-1}{x}=\lim_{n\to\infty}\{1+\frac{x}{2!}+...+\frac{x^{n-1}}{n!}\}$$

ovvero ancora

$$\frac{e^x-1}{x}-1=\lim_{n\to\infty}\{\frac{x}{2!}+...+\frac{x^{n-1}}{n!}\}$$

Per $|x|\le 1$ riesce del resto

$$\left|\{\frac{x}{2!}+...+\frac{x^{n-1}}{n!}\}\right|\le|x|\{\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}\}$$

Detta M la somma della serie convergente

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

si ha quindi

$$\left|\frac{e^x-1}{x}-1\right|\le M\,|x|$$

da cui, passando al limite per $x\to 0$ si ha l'asserto.

Si noti che, accolta la proprietá $e^{\alpha+\beta} = e^{\alpha} \, . \, e^{\beta}$ riesce anche

$$\lim_{x\to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0}$$

Infatti

$$\frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} \quad \to \quad \lim_{x\to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x}}$$

Osservato che la funzione e^x somma di una serie di addendi monotoni strettamente crescenti sará, ovviamente (?) monotona strettamente crescente, possiamo introdurre la sua inversa, che si chiama

$$\log(y)$$

essa rappresenta naturalmente la soluzione dell'equazione

$$e^x = y$$

equazione nell'incognita x, cioé

$$e^{\log(y)} = y$$

Si tratta, naturalmente di un'equazione compatibile se e solo se y appartiene all'immagine della funzione e^x, immagine che, per ora non conosciamo, ma assai presto riconosceremo essere la semiretta strettamente positiva $y > 0$.
Tornando al limite proposto

$$x + 1 = e^y \quad \to \quad x = e^y - 1 \quad \to \quad \frac{\log(x+1)}{x} = \frac{\log(e^y)}{e^y - 1} = \frac{1}{\frac{e^y - 1}{y}}$$

Tenuto conto inoltre che

$$x \approx 0 \quad \to \quad y \approx 0$$

riesce

$$\frac{\log(x+1)}{x} = \frac{1}{\frac{e^y-1}{y}} \approx 1$$

Da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x^{\alpha} \, \log(x), \quad \alpha > 0}$$

La nota disuguaglianza

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

implica

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{(1/x)^n} = +\infty \quad \to$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \exists \delta_n : \; x \in (0, \delta_n) \quad \to \quad x^n e^{\frac{1}{x}} \geq 1$$

Ne segue, passando ai logaritmi,

$$x \in (0, \delta_n) \quad \to \quad n \log(x) + \frac{1}{x} \geq 0 \quad \to \quad x \log(x) + \frac{1}{n} \geq 0$$

Tenuto conto che $x \in (0, 1) \quad \to \quad \log(x) < 0$ si ha quindi

$$x \in (0, \delta_n) \quad \to \quad -x \log(x) \leq \frac{1}{n} \quad \to \quad |x \log(x)| \leq \frac{1}{n}$$

L'arbitrarietá di n implica quindi

$$\lim_{x\to 0^+} x \log(x) = 0$$

Naturalmente si ha anche quindi, $\forall \alpha > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log(x^\alpha) = 0$$

che, tenuto conto che $\log(x^\alpha) = \alpha \log(x)$, implica $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \alpha \log(x) = 0$ ovvero

$$\forall \alpha > 0 : \; \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log(x) = 0$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha}}$$

Tenuto conto che

$$x \to 0^+ \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} \to +\infty$$

si ha

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \log\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Tenuto conto che $\log(1/x) = -\log(x)$ l'ultima relazione implica

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = 0$$

Osservazione 15.2. *In parole povere i due limiti*

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = 0$$

mostrano come

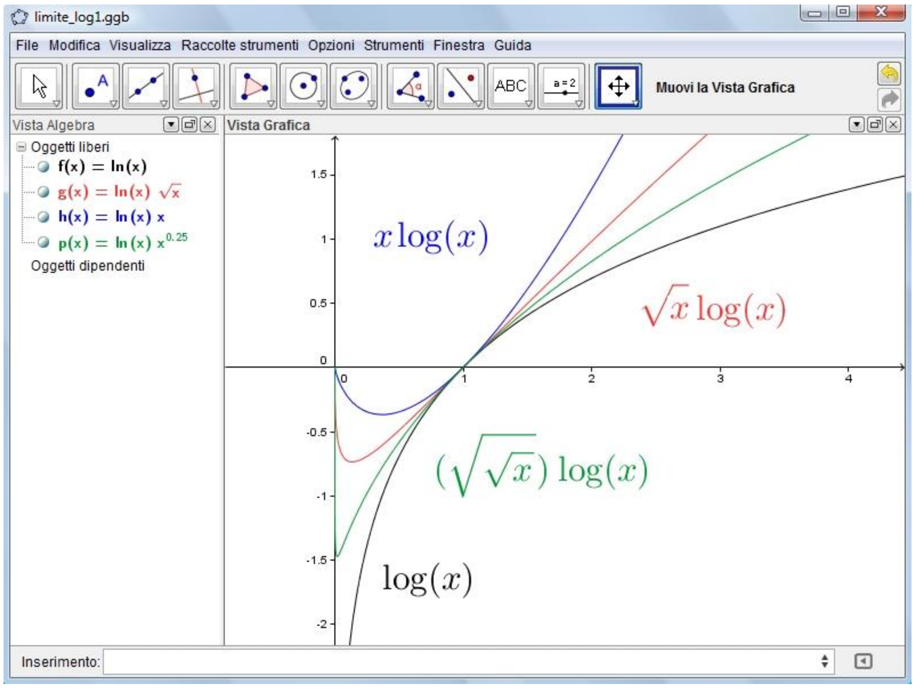

FIGURA 2. $x^\alpha\ \log(x)$

- *la divergenza di* $\log(x)$ *per* $x \to 0^+$ *sia azzerata da qualunque potenza* x^α*,*
- *la divergenza di* $\log(x)$ *per* $x \to +\infty$ *sia azzerata da qualunque potenza* x^α*.*

15.2. Basi diverse.

I logaritmi sono (erano) usati sostanzialmente relativamente a due basi famose:

- la base 10, detti, in questo caso logaritmi decimali o di Briggs
- la base e, detti, in questo caso logaritmi naturali.

La presenza delle due scelte ha motivi esclusivamente utilitaristici:

- la prima, la base 10 corrisponde alla scelta di tale base nel nostro calcolo numerico tradizionale (recentemente la diffusione dei computer con la loro opzione binaria potrebbe modificare in un prossimo futuro questa scelta)
- la seconda, la mitica base $e \approx 2.718....$ ha motivi tecnici nel senso che rende piú semplici nella scrittura alcuni algoritmi di uso frequente.

Qualunque sia la base b scelta i logaritmi $\log_b(y)$ rappresentano esclusivamente la soluzione dell'equazione

$$b^x = y$$

equazione nell'incognita x, ovvero soddisfano l'identitá

$$b^{\log_b(y)} = y$$

Proposizione 15.3. *Per ogni scelta di* $b > 0$, $b \neq 1$ *esiste una costante* k_b *tale che*

$$\forall x > 0 : \ \ \log_b(x) = k_b \log(x)$$

avendo indicato con $\log(x)$ *i logaritmi naturali.*

Dimostrazione.

$$\forall y > 0 : \ \ e^{\log(y)} = y = b^{\log_b(y)} = \left(e^{\log(b)}\right)^{\log_b(y)} = e^{\log(b)\ \log_b(y)}$$

ne segue

$$\forall y > 0 : \ \ e^{\log(y)} = e^{\log(b)\ \log_b(y)}$$

da cui

$$\log(y) = \log(b)\ \log_b(y)$$

da cui la tesi con

$$k_b = \frac{1}{\log(b)}$$

□

Osservazione 15.4. *La formula* $\log(y) = \log(b)\ \log_b(y)$ *ovvero*

$$\log_e(y) = \log_e(b)\ \log_b(y)$$

presenta una simmetria che ne aiuta senza dubbio il ricordo

$$\log_e(y) = \log_e(b)\ \log_b(y)$$

le due b *a secondo membro, un argomento e una base si semplificano come si eseguisse un prodotto di frazioni !*
Cosí, ad esempio é facile ricordare che

$$\log_{123}(y) = \log_{123}(17)\ \log_{17}(y)$$

come, ad esempio prendendo $y = 123$

$$\log_{123}(123) = \log_{123}(17)\ \log_{17}(123) \quad \to \quad 1 = \log_{123}(17)\ \log_{17}(123) \quad \to$$

$$\to \quad \log_{123}(17) = \frac{1}{\log_{17}(123)}$$

Quanto osservato circa il cambiamento di base permette di riconoscere che riesce anche, qualunque sia $B > 0, b \neq 1$,

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \, \log_b(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\log_b(x)}{x^\alpha} = 0$$

mentre

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_b(x+1)}{x} = \log_b(e)$$