ANALISI

Argomenti della Lezione

10 novembre 2011

16. Funzioni continue

La definizione di funzione continua tramite la definizione di limite:
$f : (a, b) \quad \to \quad \mathbb{R}$ é continua nel punto $x_0 \in (a, b)$ se

- esiste
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$
- $\ell = f(x_0)$

Esempio 16.1. *La funzione $f(x) = x$ é continua.*
La funzione parte intera $f(x) = [x]$ é continua nei punti non interi, non é continua nei punti interi.

La frase

f é continua

significa usualmente che essa é continua in tutti i punti in cui é stata assegnata.

Osservazione 16.2. *La continuitá di una funzione corrisponde, in parole povere alla seguente implicazione:*

$$x \approx x_0 \quad \to \quad f(x) \approx f(x_0)$$

La relazione si traduce con il linguaggio $\{\varepsilon\, \delta\}$ al modo seguente

$$\forall \varepsilon > 0 \exists\, \delta_{\varepsilon, x_0} > 0 : \; |x - x_0| \leq \delta_{\varepsilon, x_0} \quad \to \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

Si osservi che, per uno stesso ε la soglia delle distanze $\delta_{\varepsilon, x_0}$ dipende (o puó dipendere) dal punto x_0: nel senso che per garantire la stessa stima $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ in certi punti x_0 sará sufficiente una certa distanza, in altri un'altra piú severa.

Un problema non banale é riconoscere se esista una distanza cosí severa da essere sufficiente in ogni punto x_0: la risposta é SI *quando ci si riferisce a funzioni continue definite su intervalli chiusi e limitati.*
La risposta é, in generale NO *in relazione a generiche funzioni continue su intervalli non chiusi o non limitati.*

16.1. Teoremi fondamentali.

Teorema 16.3. *Se $f(x)$ e $g(x)$ sono continue nel punto x_0 allora sono continue in tale punto anche*

$$\alpha f(x) + \beta g(x),\ f(x).g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}$$

con le ovvie prudenze sul quoziente.

Esempio 16.4. *I polinomi e le funzioni razionali sono funzioni continue.*

Teorema 16.5. *Se $f(x)$ e $g(x)$ sono*

- *componibili,*
- *g é continua in x_0*
- *f é continua in $g(x_0)$*

allora la funzione composta $F(x) = f[g(x)]$ é continua in x_0.

Esempio 16.6. *Le funzioni goniometriche* $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ *sono continue*

Teorema 16.7. *La funzione $x \quad \to \quad |x|$ é continua.*

Dimostrazione. Deriva dalla disuguaglianza triangolare

$$||x| - |x_0||\,| \leq |x - x_0|$$

$\square$

Corollario 16.8. *Se $f(x)$ é continua allora é continua anche $|f(x)|$*

Esempio 16.9. *Sia*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

$f(x)$ non é continua in $x_0 = 0$ ma $|f(x)|$ lo é !

Teorema 16.10. *La funzione e^x é continua in tutto $\mathbb{R}$*

Dimostrazione. Il limite riconosciuto

$$\lim_{x\to 0} e^x = 1$$

riconosce la continuitá in $x_0 = 0$.
In tutti gli altri punti riesce ugualmente

$$\lim_{x\to x_0} e^x = e^{x_0}$$

infatti

$$|e^x - e^{x_0}| = e^{x_0}\left|e^{x-x_0} - 1\right|$$

da cui l'asserto tenuto conto che

$$\lim_{x\to x_0} e^{x-x_0} = 1$$

$\square$

Teorema 16.11. *La funzione* $\log(x)$ *é continua.*

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$e^{\log(y)} - e^{\log(y_0)} = y - y_0 \quad \to \quad e^{\log(y)-\log(y_0)} - 1 = \frac{y-y_0}{e^{\log(y_0)}}$$

é evidente che

$$y > y_0 \quad \to \quad \log(y) > \log(y_0) \quad \to \quad \log(y) - \log(y_0) > 0$$

Tenuto conto che $h > 0 \quad \to \quad h < e^h - 1$ si ha

$$\log(y) - \log(y_0) < e^{\log(y)-\log(y_0)} - 1 = \frac{y-y_0}{y_0}$$

e quindi, tenuto conto dell'analoga relazione che si incontra se $y < y_0$, si ha

$$|\log(y) - \log(y_0)| < \frac{1}{\min[y, y_0]} |y - y_0|$$

che esprime la continuitá: $y \approx y_0 \quad \to \quad \log(y) \approx \log(y_0)$ $\square$

16.2. Estensione per continuitá. Una funzione $f(x)$ definita in un intervallo privato di un punto x_0 e dotata di limite ℓ in tale punto, puó essere

prolungata per continuitá

anche su tale punto assumendo come

$$f(x_0) = \ell$$

Esempio 16.12. *La funzione* $f(x) = \sin(x)/x$ *puó essere prolungata per continuitá su* $x_0 = 0$ *attribuendole in tale punto il valore del limite,* 1.

Esempio 16.13. *La funzione* $\sin(1/x)$ *non é prolungabile per continuitá fin sull'origine.*

16.3. Le funzioni Lipschitziane.

Rudolf Otto Sigismund Lipschitz
(14 May 1832 - 7 October 1903)
was a German mathematician
and professor at the University of Bonn
from 1864.

Tra le funzioni continue hanno particolare interesse quelle che soddisfano la *condizione di Lipschitz*

$$\exists L > 0 : \ \ \forall x, y \in I : \ |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Esempio 16.14. *La funzione $\sqrt{x}$ non é lipschitziana in $I = [0, 1]$: infatti se lo fosse ci sarebbe $L > 0$ tale che*

$$|\sqrt{x} - \sqrt{0}| \leq L\,|x - 0| \quad \to \quad \sqrt{x} \leq L\,x \quad \to \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \leq L$$

mentre é evidente che la frazione

$$\frac{1}{\sqrt{x}}$$

diverge all'avvicinarsi di x a zero.

Proposizione 16.15. *I grafici delle funzioni lipschitziane hanno pendenze limitate.*

Dimostrazione. Infatti

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq L$$

$\square$

Proposizione 16.16. *Combinazioni algebriche di funzioni lipschitziane sono lipschitziane.*

Proposizione 16.17. *Prodotti di funzioni lipschitziane limitate sono lipschitziani.*

Esempio 16.18. *La funzione $f(x) = x$ é lipschitziana (ovviamente) in tutto $\mathbb{R}$: il suo quadrato $g(x) = x^2$ non é lipschitziana in tutto $\mathbb{R}$. Lo é, tuttavia, in ogni intervallo limitato.*

16.4. Teorema del valor medio. Il *Teorema del valor medio* o *Teorema d'esistenza degli zeri* é lo strumento fondamentale per conoscere le immagini di funzioni continue definite in intervalli.
Il suo enunciato piú semplice é il seguente

> *Sia $f(x)$ una funzione continua definita nell'intervallo $[a, b]$: se agli estremi a e b prende un valore positivo e un valore negativo allora c'é qualche punto $c \in [a, b]$ in cui la funzione vale zero.*

Nella semplicitá di tale enunciato tale teorema appare evidente: tale evidenza é fondata tuttavia su alcune certezze del tutto superficiali.

Esempio 16.19. *Cominciamo con il riconoscere che senza il requisito della continuitá un tale risultato si perde: prendiamo la funzione*

$$f(x) = [x] + \frac{1}{2}$$

riesce

$$f(-10) = -9.5, \quad f(10) = 10.5$$

quindi in un estremo prende un valore negativo, nell'altro un valore positivo... e tuttavia non c'é alcun punto $c \in [-10, 10]$ *in cui riesca* $f(c) = 0$.
Semplicemente la funzione assegnata

salta

il valore zero.

Si dirá

le funzioni continue non possono fare tali salti

ebbene questa affermazione é esattamente la tesi del teorema dei valori intermedi.

Esempio 16.20. *La funzione* $f(x) = x^2 - 2$ *se si lavorasse solo sui razionali non rispetterebbe il teorema d'esistenza degli zeri: infatti, pensando all'intervallo* $[0, 5]$ *riesce*

$$f(0) = -2 < 0, \quad f(5) = 23 > 0$$

e, tuttavia non ci puó essere alcun $c \in [0, 5]$ *(stiamo lavorando con i soli razionali) in cui riesca* $f(c) ==$*: questo infatti corrisponderebbe a trovare un razionale* c *tale che* $c^2 - 2 = 0$ *ovvero*

$$c^2 = 2$$

Teorema 16.21. *Sia* $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \quad \to \quad \mathbb{R}$ *continua, sia* $f(a) \neq f(b)$ *e sia* $\eta \in [\min[f(a), f(b)], \max[f(a), f(b)]]$ *allora esiste* $\xi \in [a, b]$ *tale che*

$$f(\xi) = \eta$$

DIMOSTRAZIONE. Si divide $[a, b]$ a metá con il punto c:

- se $\eta \in [f(a), f(c)]$ si sceglie la prima metá,
- se $\eta \in [f(c), f(b)]$ si sceglie la seconda metá.

Iterando il procedimento si costruisce una successione $\{[a_n, b_n]\}$ di intervalli chiusi, limitati, non vuoti, incapsulati, tali che

$$\eta \in (\min[f(a_n), f(b_n)], \max[f(a_n), f(b_n)]) \tag{1}$$

L'assioma degli intervalli incapsulati garantisce che

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \neq \emptyset$$

Il fatto che gli $[a_n, b_n]$ siano sempre piú corti garantisce che tale intersezione contiene un solo punto ξ. Riesce inoltre ovviamente

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \xi = \lim_{n\to\infty} b_n$$

La continuitá della f garantisce quindi che

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} a_n = \xi & \to \quad \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\xi) \\ \lim_{n\to\infty} b_n = \xi & \to \quad \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\xi) \end{cases}$$

Del resto dalla (1) segue anche

$$|\eta - f(a_n)| \leq |f(b_n) - f(a_n)|$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \eta$$

da cui si deduce quindi, per l'unicitá del limite, che

$$f(\xi) = \eta$$

□

Corollario 16.22. *Ogni polinomio $P(x)$ di grado dispari ha almeno una radice, cioé l'equazione*

$$P(x) = 0$$

ha almeno una soluzione.

Dimostrazione. Tenuto conto che, per via del grado dispari, $P(x)$ diverge per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$ con segni opposti, esistono certamente intervalli $[-n, n]$ ai cui estremi $P(x)$ prende valori di segno opposto.
Allora il precedente teorema assicura che per ogni

$$\eta \in (P(-n), P(n))$$

esiste $\xi \in (-n, n)$ tale che $P(\xi) = \eta$: scelto $\eta = 0$ sui ha quindi l'esistenza di punti ξ tali che $P(\xi) = 0$. □