ANALISI

Argomenti della Lezione

11 novembre 2011

17. Funzioni continue

17.1. Massimo e minimo.

Teorema 17.1. *Sia $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \quad \to \quad \mathbb{R}$, continua: allora esistono il massimo e il minimo di f.*
Esistono cioé due punti x_m, $x_M \in [a, b]$ tali che

$$\forall x \in [a, b] : \ f(x_m) \le f(x) \le f(x_M)$$

DIMOSTRAZIONE. Proviamo l'esistenza di $x_M \in [a, b]$ tale che

$$\forall x \in [a, b] : \ f(x) \le f(x_M)$$

Sia Λ l'estremo superiore dell'insieme dei valori $\{f(x)\}$, $x \in [a, b]$: Λ puó indicare un numero o il simbolo $+\infty$, nel senso che l'insieme $\{f(x)\}$, $x \in [a, b]$ puó essere limitato superiormente o anche illimitato.
Indicato con c il punto medio di $[a, b]$ scegliamo delle due metá $[a, c]$, $[c, b]$ quella in cui la funzione f ha ancora come estremo superiore lo stesso Λ.
É chiaro che in una delle due questo deve accadere: se infatti entrambi gli estremi superiori Λ_1 e Λ_2 nelle due metá fossero minori di Λ allora riuscirebbe

$$\forall x \in [a, b] : \ f(x) \le \max[\Lambda_1, \Lambda_2] < \Lambda$$

Indicato con $[a_1, b_1]$ il primo intervallo indicheremo con $[a_2, b_2]$ la metá scelta.
Il procedimento proposto quindi, pensando di iterarlo, produce una successione di intervalli incapsulati $\{[a_n, b_n]\}$:
sia

$$\xi = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$$

Tenuto conto che f é continua in ξ per ogni $\varepsilon >$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$|x - \xi| \le \delta_\varepsilon \quad \to \quad |f(x) - f(\xi)| \le \varepsilon$$

Ne segue

$$\sup_{|x-\xi| \le \delta_\varepsilon} f(x) \le f(\xi) + \varepsilon$$

Naturalmente esisterá anche un n_ε tale che

$$\forall n \ge n_\varepsilon : [a_n, b_n] \subseteq (\xi - \delta_\varepsilon, \xi + \delta_\varepsilon)$$

ne segue allora

$$\Lambda = \sup_{x\in[a_n,b_n]} f(x) \le \sup_{|x-\xi|\le\delta_\varepsilon} f(x) \le f(\xi) + \varepsilon$$

ne segue anche

$$\Lambda - \varepsilon \le f(\xi) \le \Lambda \quad \to \quad f(\xi) = \Lambda$$

Abbiamo quindi contemporaneamente i due risultati

- Λ é un numero, cioé l'insieme $\{f(x)\}$, $x \in [a, b]$ é superiormente limitato,
- l'estremo superiore $\Lambda = f(\xi)$ é un valore della funzione, cioé é un massimo.

Il discorso per il minimo é analogo.

Si puó anche osservare come cercare il minimo di $f(x)$ equivale a cercare il massimo di $-f(x)$: tenuto conto che se f é continua lo é anche $-f$, allora $-f$ ammette massimo, e quindi f ammette minimo.

$\square$

17.2. Immagine delle funzioni continue. Sia

$$f : [a, b] \subset \mathbb{R} \quad \to \quad \mathbb{R}$$

continua.
Allora l'insieme $E := \{f(x)\},\ x \in [a, b]$, detto *Immagine di* f,

- é limitato,
- ammette minimo $f(x_m)$ e massimo $f(x_M)$,
- coincide con l'intervallo chiuso e limitato $[f(x_m),\ f(x_M)]$.

L'ultima importante osservazione deriva da due fatti

- $E \subseteq [f(x_m),\ f(x_M)]$
- $\forall\eta \in [f(x_m),\ f(x_M)]\ \exists\xi : f(\xi) = \eta$ (teor. Valori intermedi)
- quindi $[f(x_m),\ f(x_M)] \subseteq E$

Quindi l'insieme immagine E é anch'esso un intervallo, quello determinato da minimo e massimo della funzione f in $[a, b]$.

17.3. Invertibilitá delle funzioni monotone. Sia f continua in $[a, b]$ e strettamente monotona:

$$f : [a, b] \quad \to \quad [\min[f(a), f(b)], \max[f(a), f(b)]]$$

$\forall y \in [\min[f(a), f(b)], \max[f(a), f(b)]]$ l'equazione

$$f(x) = y$$

ha una e una sola soluzione $x \in [a, b]$.
Tale soluzione si indica con $x = f^{-1}(y)$

17.4. Continuitá dell'inversa.

Teorema 17.2. *L'inversa f^{-1} di una funzione continua e strettamente monotona é continua.*

Dimostrazione. Supponiamo

$$f : [a, b] \quad \rightarrow \quad [f(a), f(b)]$$

strettamente crescente.
Per provare che l'inversa é continua in $y_0 \in [f(a), f(b)]$, scelto $\varepsilon > 0$ consideriamo l'intervallo

$$[f^{-1}(y_0) - \varepsilon,\ f^{-1}(y_0) + \varepsilon] \subset [a, b]$$

Indichiamo con

$$m_\varepsilon = f\left(f^{-1}(y_0) - \varepsilon\right), \quad M_\varepsilon = f\left(f^{-1}(y_0) + \varepsilon\right)$$

e sia

$$\delta_\varepsilon = \min[y_0 - m_\varepsilon,\ M_\varepsilon - y_0]$$

É facile riconoscere che

$$|y - y_0| \leq \delta_\varepsilon \quad \rightarrow \quad |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| \leq \varepsilon$$

□

17.5. Applicazioni. Il precedente teorema sulla continuitá delle inverse di funzioni continue strettamente monotone offre la continuitá di numerose funzioni elementari:

$$\sqrt{x},\ \log(x),\ \arcsin(x),\ \arctan(x),\ \arccos(x), ecc.$$