ANALISI

Argomenti della Lezione

16 novembre 2011

18. DERIVATE

GLOSSARIO

- infinitesimo in x_0: quantitá $\varepsilon(x)$che ha limite zero per $x \to x_0$,
- infinitesimo di ordine 1 in x_0: $\triangle x = x - x_0$,
- infinitesimi d'ordine superiore: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\varepsilon(x)}{x - x_0} = 0$

Assegnata una funzione $f(x)$ continua l'espressione

$$f(x) - f(x_0)$$

fornisce una quantitá infinitesima in x_0.
Il concetto di derivata si riferisce sostanzialmente a confrontare l'infinitesimo $\triangle f = f(x) - f(x_0)$ con l'infinitesimo di ordine 1 $x - x_0$.

18.1. La derivata come approssimazione lineare.

Le formule piú comuni sono quelle dettate dalla proporzionalitá diretta:

- una quantitá y dipenda da un'altra x: $y = f(x)$
- valori diversi di x producono valori diversi di y,
- la proporzionalitá diretta dice che la variazione $f(x_1) - f(x_0)$ si esprime semplicemente come
$$k.(x_1 - x_0)$$
con il fattore k costante.

Tutte le volte che tale fortunata (e quindi improbabile) relazione non si realizza si spera di poter esprimere il divario $f(x_1) - f(x_0)$ come somma di due addendi

$$k.(x_1 - x_0) + R(x_1, x_0)$$

il secondo dei quali, la correzione o il resto, $R(x_1, x_0)$ sia, per $x_1 \approx x_0$ nettamente meno influente del primo, quello legato alla proporzionalitá.

Esempio 18.1. *Sia $f(x) = x^2$ la variazione tra due valori x_1 e x_0 é*

$$f(x_1) - f(x_0) = x_1^2 - x_0^2 = (x_1 - x_0)(x_1 + x_0)$$

ovvero, scritto $x_1 = x_0 + (x_1 - x_0)$, si ha

$$f(x_1) - f(x_0) = 2x_0\,(x_1 - x_0) + (x_1 - x_0)^2$$

La variazione $f(x_1) - f(x_0)$ si esprime pertanto come somma di due addendi

- *il primo che corrisponde alla proporzionalitá $2x_0\,(x_1 - x_0)$,*

- *il secondo, che rappresenta la correzione,* $R(x_1, x_0) = (x_1 - x_0)^2$.

Dall'espressione

$$f(x_1) - f(x_0) = k.(x_1 - x_0) + R(x_1, x_0)$$

segue, dividendo per $x_1 - x_0$

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = k + \frac{R(x_1, x_0)}{x_1 - x_0}$$

da cui, accogliendo come significato di quel

nettamente meno influente

la relazione di limite

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{R(x_1, x_0)}{x_1 - x_0} = 0$$

se ne deduce che il coefficiente k rappresenta il limite

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = k$$

Tutte le volte che per una funzione f esiste

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda$$

essa potrá essere espressa come

$$f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + R(x, x_0)$$

con la correzione R soddisfacente alla condizione

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x, x_0)}{x - x_0} = 0$$

Esempio 18.2. *Sia* $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 1$, *scelto* $x_0 = 0$ *riesce*

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x^3 + 3x^2 + 5x + 1) - 1}{x} = \lim_{x \to 0}(x^2 + 3x + 5) = 5$$

Riesce pertanto

$$x^3 + 3x^2 + 5x + 1 = 1 + 5x + R(x, 0)$$

La correzione $R(x, 0)$ *é evidente*

$$R(x, 0) = x^3 + 3x^2$$

espressione nettamente meno influente *nel senso appunto che*

$$\lim_{x \to 0} \frac{R(x, 0)}{x} = 0$$

18.2. Significato geometrico.

Assegnata la funzione $f(x)$ definita nell'intervallo $[a, b]$, consideriamo il suo grafico e, scelti $x_1, x_0 \in [a, b]$ consideriamo la retta secante determinata dai due punti

$$P_0 = (x_0, f(x_0)), \quad P_1 = (x_1, f(x_1))$$

Essa ha equazione

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0)$$

É evidente in molti casi come le rette secanti si collochino, se riferite a punti $x_1 \approx x_0$ su posizioni di tangenza rispetto al grafico.
L'influenza del punto x_1 nell'equazione della secante c'é solo sul coefficiente angolare della retta: quindi la retta tangente sará quella con coefficiente angolare

$$m = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Definizione 18.3. *Il limite*

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

se esiste prende il nome di derivata della funzione f nel punto x_0, e si denota con $f'(x_0)$.

L'espressione

$$r(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \neq x_0$$

prende il nome di

rapporto incrementale

della funzione f nel punto x_0.

18.3. La funzione modulo.

Non tutte le funzioni continue ammettono in ogni punto x_0 rapporto incrementale $r(x)$ convergente per $x \to x_0$.
Quindi per non tutte le funzioni esiste la possibilitá di esprimere la variazione $f(x) - f(x_0)$ come somma di un addendo lineare e di una correzione infinitesima d'ordine superiore.

Il caso piú semplice é offerto dalla funzione $f(x) = |x|$ nel punto $x_0 = 0$: si ha infatti

$$f(x) - f(0) = \begin{cases} 1(x - 0) & se \quad x > 0 \\ -1(x - 0) & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Quindi non esiste alcuna costante k tale che

$$f(x) - f(0) = k(x - 0) + R(x)$$

con $R(x)$ infinitesimo d'ordine superiore.
La lettura geometrica faceva del resto riconoscere facilmente come il grafico di $f(x) = |x|$ non abbia tangente nel punto di ascissa 0.

18.4. La funzione $\sin(1/x)$.

La funzione $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ non é prolungabile per continuitá nell'origine e quindi non puó neanche parlarsi in alcun modo di derivabilitá nell'origine.
Le funzioni

$$f_\alpha(x) = x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \alpha > 0$$

sono invece prolungabili per continuitá nell'origine scegliendo $f_\alpha(0) = 0$.
Riesce inoltre

$$\frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x - 0} = x^{\alpha-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

e quindi risulta evidente che per $\alpha > 1$ tali prolungamenti sono anche derivabili., con derivata $f'_\alpha(0) = 0$.

18.5. Prime formule di derivazione. La disponibilitá di alcuni limiti notevoli consente di riconoscere la derivabilitá in ogni punto x_0 del loro insieme di definizione di numerose funzioni:

$$x^n, \ \sin(x), \ \cos(x), \ e^x$$

É indispensabile ricordare, con la stessa prontezza della tavola pitagorica, le formule di derivazione di una dozzina di funzioni elementari.

18.6. Regole di derivazione. Le regole relative a limiti di combinazioni lineari, di prodotti, di quozienti producono analoghe regole circa la derivazione di

- combinazioni lineari di funzioni derivabili,
- prodotti di funzioni derivabili,
- quozienti di funzioni derivabili.

Lemma 18.4. *Le funzioni costanti sono derivabili con derivata zero.*

Lemma 18.5. *La funzione $f(x) = x$ é derivabile e riesce $f'(x) = 1$.*

Proposizione 18.6. *I polinomi sono derivabili.*

Dimostrazione. La regola di derivazione del prodotto riconosce la derivabilitá dei monomi ax^n.
La regola sulle combinazioni lineari riconosce quindi la derivabilitá dei polinomi. $\square$

Proposizione 18.7. *Le funzioni razionali sono derivabili.*

Dimostrazione. La regola sui quozienti riconosce che il quoziente di due polinomi é derivabile. $\square$