ANALISI

Argomenti della Lezione

17 novembre 2011

19. DERIVATE

19.1. Derivate delle funzioni composte. La derivabilitá di una funzione $f(x)$ in un punto x_0 significa che

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\triangle x + R_1(\triangle x)$$

con

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{R_1(\triangle x)}{\triangle x} = 0$$

Supponiamo di avere due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ derivabili (supponiamo per semplicitá in ogni punto) e componibili: la funzione composta

$$F : x \to f[g(x)] \quad x \to g(x) \to f[g(x)]$$

riesce anch'essa derivabile.

$$\triangle F = F(x) - F(x_0) = f[g(x)] - f[g(x_0)] = f'[g(x_0)](\triangle g) + R_1[\triangle g]$$

Tenuto conto che

$$\triangle g = g'(x_0)\triangle x + R_2(\triangle x)$$

si ha, sostituendo,

$$\triangle F = f'[g(x_0)]\left\{g'(x_0)\triangle x + R_2(\triangle x)\right\} + R_1[g'(x_0)\triangle x + R_2(\triangle x)]$$

ovvero

$$\begin{aligned} \triangle F \quad &= \quad f'[g(x_0)]g'(x_0)\triangle x \quad + \\ &+ \left\{f'[g(x_0)]R_2(\triangle x) + R_1[g'(x_0)\triangle x + R_2(\triangle x)]\right\} \qquad (1) \end{aligned}$$

L'espressione a seconda riga é infinitesima d'ordine superiore a $\triangle x$: infatti

- per il primo addendo la cosa é ovvia dal momento che
$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{R_2(\triangle x)}{\triangle x} = 0$$
- per il secondo tenuto conto che $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_\varepsilon > 0$ tale che
$$|a| \leq \delta_\varepsilon \quad \to \quad |R_1(a)| \leq \varepsilon |a|$$
se $|\triangle x|$ é sufficientemente piccolo da garantire che
$$|g'(x_0)\triangle x + R_2(\triangle x)| \leq \delta_\varepsilon$$

ne segue

$$|R_1[g'(x_0)\triangle x + R_2(\triangle x)]| \le \varepsilon|\triangle x|$$

da cui, per l'arbitrarietá di $\varepsilon > 0$ deriva

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{R_1[g'(x_0)\triangle x + R_2(\triangle x)]}{\triangle x} = 0$$

Riesce pertanto verificato che, indicato con

$$F'(x_0) = f'[g(x_0)]g'(x_0)$$

riesce

$$\triangle F = F'(x_0)\triangle x + \mathcal{R}(\triangle x)$$

dove l'addendo $\mathcal{R}(\triangle x)$ rappresenta la (1) precedentemente studiata.

La formula ottenuta

$$F'(x) = f'[g(x)]g'(x)$$

si chiama regola di derivazione delle funzioni composte ed é usata frequentissimamente senza alcuna difficoltá.

Esempio 19.1. *La derivata della funzione composta*

$$F(x) = f[g(x)] : f(x) = \sin(x), \quad g(x) = 1 + x^2) : F(x) = \sin(1 + x^2)$$

é

$$F'(x) = f'[g(x)]g'(x) = \cos[1 + x^2]2x$$

19.2. Derivate delle funzioni inverse.

Numerose funzioni elementari sono costruite come *funzioni inverse* : lo sono

- le radici quadrate, cubiche, ecc.
- i logaritmi,
- l'arcotangente, l'arcoseno, l'arcocoseno.

La loro derivabilitá viene in genere dedotta da quella delle funzioni di cui esse sono le inverse.
Una volta trovate ipotesi sotto le quali una funzione invertibile e derivabile produce una funzione inversa ancora derivabile la formula di derivazione é ovvia conseguenza della regola di derivazione delle funzioni composte.

$$F(x) = f[f^{-1}(x)] = x \quad \to \quad F'(x) = f'[f^{-1}(x)] \left(f^{-1}(x)\right)' = 1$$

da cui

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

Esempio 19.2. *Consideriamo la radice quadrata, inversa, limitatamente a $x \geq 0$ della $f(x) = x^2$:*

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{f'[g(x)]} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Esempio 19.3. *Analogo discorso per la funzione arcotangente, inversa, limitatamente a $\pi/2 < x < \pi/2$ della $f(x) = \tan(x)$:*

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{f'[g(x)]} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2(\arctan(x))}} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\sin^2(\arctan(x)) + \cos^2(\arctan(x))}{\cos^2(\arctan(x))}} = \frac{1}{\tan^2(\arctan(x)) + 1}$$

Da cui, tenuto conto che $\tan(\arctan(x)) = x$, *si ha*

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Lemma 19.4. *Sia $f(x)$ continua e strettamente monotona in $[a, b]$: allora é invertibile e l'inversa é continua.*

Teorema 19.5. *Sia $f(x)$ continua, derivabile e invertibile: la sua inversa $f^{-1}(x)$ é derivabile in tutti i punti x in cui riesce*

$$f'[f^{-1}(x)] \neq 0$$

Dimostrazione.

$$f : [a, b] \to [m, M] \qquad f^{-1} : [m, M] \to [a, b] \qquad \begin{cases} y = f(x) & \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \\ y_0 = f(x_0) & \Leftrightarrow x_0 = f^{-1}(y_0) \end{cases}$$

Inoltre

$$x \neq x_0 \quad \Leftrightarrow \quad y \neq y_0$$

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

La continuitá di f e di f^{-1} implica che

$$x \to x_0 \quad \Leftrightarrow \quad y \to y_0$$

Pertanto se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \neq 0$$

ne segue che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

e quindi

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

□

Esempio 19.6. *La derivata di* $\arcsin(x)$*:*

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\cos[\arcsin(x)]}$$

Tenuto conto che $\arcsin(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$ *riesce*

$$\cos[\arcsin(x)] = \sqrt{1 - \sin^2[\arcsin(x)]} = \sqrt{1 - x^2}$$

e, pertanto,

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Osservazione 19.7. *La regola di derivazione delle funzioni inverse puó ingenerare ottimismi non motivati: per conoscere la derivata di una funzione inversa occorre*

....conoscere la funzione inversa !

Infatti la regola

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

utilizza, a secondo membro, sia la derivata f' *della funzione diretta, sia la* f^{-1} *che determina il punto in cui la* f' *deve essere calcolata.*