ANALISI

Argomenti della Lezione

18 novembre 2011

20. DERIVATE

20.1. Teorema di Lagrange.

Teorema 20.1 (Lagrange). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua e derivabile, esiste almeno un punto $\xi \in [a, b]$ in cui riesce*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dimostrazione. Si tratta di un risultato geometricamente evidente: esiste qualche punto del grafico in cui la tangente é parallela alla corda definita dai due estremi $A = (a, f(a)),\ B = (b, f(b))$.
Si tratta di un risultato ovviamente collegato al fatto che il grafico considerato abbia tangente in ogni punto: se ammettessimo la presenza di punti angolosi, tipo quanto si incontra nel grafico di $|x|$, il risultato si perderebbe.

Una dimostrazione tecnica semplicissima si ricava considerando la funzione

$$F(x) = f(x) - \left\{ \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right\}$$

che vale zero agli estremi a e b e per la quale quindi ci deve essere almeno un punto ξ in cui la derivata sia nulla:

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \quad \to \quad f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

Dal teorema di Lagrange si ricavano risultati qualitativi importanti:

- MONOTONIA: se $\forall x \in [a, b] : \ f'(x) \geq 0$ allora

  $$\forall x_1, x_2 \in [a, b] : \ \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0$$

  ovvero

  $$x_1 \leq x_2 \quad \to \quad f(x_1) \leq f(x_2)$$

- LIPSCHITZIANITÁ: se $\forall x \in [a, b] : \ |f'(x)| \leq L$ allora

  $$\forall x_1, x_2 \in [a, b] : \ \left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leq L$$

ovvero

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] : \ |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

- ERRORE NELL'APPROSSIMAZIONE LINEARE.

$$\frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} = f'(\xi) \quad \to \quad f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = f'(\xi)\triangle x$$

Ovvero

$$f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = f'(x_0)\triangle x + [f(\xi) - f(x_0)]\triangle x$$

Osservazione 20.2. *L'idea che tracciata una curva ci sia sempre qualche punto in cui la tangente riesca parallela alla corda determinata dagli estremi non dipende solo dalla regolaritá della curva (assenza di punti angolosi) ma anche dal fatto che si tratti di una curva piana.*
Le curve non piane, cioé non contenute in un piano, possono perdere tale proprietá.
Basta pensare all'elica (il corrimano delle scale a chiocciola): si puó pensare al caso in cui la corda, il segmento fra i due estremi, sia perfettamente verticale, mentre le tangenti hanno sempre una regolare collocazione obliqua.

20.2. Teorema di Cauchy.

Teorema 20.3. *Siano f e g due funzioni $[a,b] \ \to \ \mathbb{R}$ continue e derivabili: esiste almeno un punto $\xi \in [a,b]$ in cui riesce*

$$[f(b) - f(a)]g'(\xi) - [g(b) - g(a)]f'(\xi) = 0$$

DIMOSTRAZIONE. Sia

$$F(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$$

Tenuto conto che

$$\begin{cases} F(a) = [f(b) - f(a)]g(a) - [g(b) - g(a)]f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) \\ F(b) = [f(b) - f(a)]g(b) - [g(b) - g(a)]f(b) = -f(a)g(b) + g(a)f(b) \end{cases}$$

$$\to \quad F(a) = F(b)$$

esiste pertanto, per il teorema di Rolle almeno un punto ξ in cui riesce $F'(\xi) = 0$ da cui la tesi. □

Corollario 20.4. *Siano f e g due funzioni $[a,b] \ \to \ \mathbb{R}$ continue e derivabili e riesca $\forall x \in [a,b] : \ g'(x) \neq 0$: esiste almeno un punto $\xi \in [a,b]$ in cui riesce*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

DIMOSTRAZIONE. La tesi discende dalla relazione

$$[f(b) - f(a)]g'(\xi) - [g(b) - g(a)]f'(\xi) = 0$$

eseguendo due divisioni, entrambe lecite:

- quella per $g'(\xi)$ lecita per l'ipotesi $\forall x \in [a, b] : \; g'(x) \neq 0$
- quella per $g(b) - g(a)$ sicuramente diverso da zero in quanto se fosse $g(b) = g(a)$ allora, per il teorema di Rolle, esisterebbe qualche punto $\eta \in [a, b]$ in cui $g'\eta) = 0$, contrariamente all'ipotesi $\forall x \in [a, b] : \; g'(x) \neq 0$.

$\square$

Osservazione 20.5. *Potrebbe venire in mente una dimostrazione alternativa fondata direttamente sul teorema di Lagrange:*

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi_1) & \rightarrow & f(b)-f(a) = f'(\xi_1)(b-a) \\ \dfrac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(\xi_2) & \rightarrow & g(b)-g(a) = g'(\xi_1)(b-a) \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}$$

Non si puó tuttavia ritenere che ξ_1 debba coincidere con ξ_2: quindi non si ottiene, per questa via, la tesi di Cauchy !

20.3. Teorema di Hopital.

Si tratta della piú importante applicazione del precedente teorema di Cauchy.

Teorema 20.6 (Hopital)**.** *Siano f e g due funzioni $[a, b] \to \mathbb{R}$, continue e derivabili, nulle in $x_0 \in [a, b]$: se esiste il limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$$

allora riesce anche

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

DIMOSTRAZIONE. Tenuto conto essendo $f(x_0) = g(x_0) = 0$ si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

riesce, applicando al secondo rapporto il teorema di Cauchy riferito all'intervallo $[x, x_0]$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \xi \in [x, x_0] \tag{1}$$

L'ipotesi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$$

implica del resto che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$|x - x_0| \leq \delta_\varepsilon \quad \to \quad \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \lambda\right| \leq \varepsilon$$

Ma allora, dalla (1) segue

$$\forall x \in [x_0 - \delta_\varepsilon, \frac{f(x)}{g(x)} x_0 + \delta_\varepsilon] : \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \lambda\right| \leq \varepsilon$$

ovvero

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

$\square$

Teorema 20.7 (Hopital)**.** *Siano f e g due funzioni $(a, b] \to \mathbb{R}$, continue e derivabili, entrambe divergenti a $+\infty$ per $x \to a$: se esiste il limite*

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$$

allora riesce anche

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

Dimostrazione. Siano $a < x < \xi < b$ applicando il Corollario del teorema di Cauchy all'intervallo $[\xi, x]$ si ha

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{g(x) - g(\xi)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}, \qquad \eta \in [x, \xi]$$

ovvero

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - \dfrac{f(\xi)}{f(x)}}{1 - \dfrac{g(\xi)}{g(x)}} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$$

ovvero ancora

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)} \cdot \frac{1 - \dfrac{g(\xi)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(\xi)}{f(x)}}$$

Tenuto conto che

$$\xi \approx a : \quad \to \quad x \approx a, \qquad \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)} \approx \lambda$$

si ha che

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \lambda \, . \, \frac{1 - \dfrac{g(\xi)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(\xi)}{f(x)}}$$

da cui, tenuto conto che

$$x \approx a \quad \rightarrow \quad \frac{1 - \dfrac{g(\xi)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(\xi)}{f(x)}} \approx 1$$

si ricava

$$x \approx a \quad \rightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} \approx \lambda$$

$\square$