ANALISI

Argomenti della Lezione

23 novembre 2011

21. Uso delle derivate

21.1. Teorema d'esistenza degli zeri.

Teorema 21.1. *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua e derivabile: se* $f'(a).f'(b) < 0$ *esiste* $c \in [a, b]$ *tale che* $f'(c) = 0$.

Dimostrazione. Sia, ad esempio $f'(a) > 0,\ f'(b) < 0$: allora

$$\begin{array}{llll} a < x < a+\delta & \to \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \geq \dfrac{1}{2}f'(a) & \to \quad f(x) > f(a) \\ b-\delta < x < b & \to \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} & \leq \dfrac{1}{2}f'(b) & \to \quad f(x) > f(b) \end{array}$$

Il massimo M di $f(x)$ in $[a, b]$ non é quindi né $f(a)$ né $f(b)$: quindi il massimo é raggiunto in un punto interno $c \in (a, b)$.
In tale punto quindi riesce $f'(c) = 0$.

□

Proposizione 21.2. *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua e derivabile: per ogni* $\eta \in (f'(a), f'(b))$ *esiste qualche* $c \in (a, b)$ *tale che* $f'(c) = \eta$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$F(x) = f(x) - \eta x$$

continua e derivabile in $[a, b]$ e tale che

$$F'(x) = f'(x) - \eta, \quad F'(a) = f'(a) - \eta < 0, \quad F'(b) = f'(b) - \eta > 0$$

Per il precedente teorema esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$F'(c) = 0 \quad \to \quad f'(c) = \eta$$

□

21.2. Derivabilitá tramite il limite della derivata.

Per riconoscere, o meno, l'esistenza della derivata di una funzione $f(x)$ in un punto x_0 occorre provare l'esistenza del

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Nel caso si sappia che la funzione f é derivabile nei punti $x \neq x_0$ il precedente limite puó essere trattato con il teorema di Hopital:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h)}{1}$$

Osservazione 21.3. *La funzione*

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

prolungata attribuendole il valore zero nell'origine é derivabile anche nell'origine:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

Il teorema di Hopital avrebbe proposto il limite

$$\lim_{h \to 0} f'(h) = \lim_{h \to 0} \left\{ 2h \sin\left(\frac{1}{h}\right) - \cos\left(\frac{1}{h}\right) \right\}$$

che non esiste.
L'esempio é interessante in quanto mostra come l'ipotesi del teorema di Hopital, esistenza del limite del quoziente delle derivate, sia sufficiente all'esistenza del limite del quoziente delle funzioni, ma non necessaria.

21.3. Esempi di grafici.

- $f(x) = x^4 - x^2$
- $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$
- $f(x) = \dfrac{2x^2 \sin(x)}{x^2+1}$

21.4. Asintoti.

Si riferiscono a tre casi:

- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$
- $\lim_{x \to \pm\infty} \{f(x) - (mx+p)\}$
- $\lim_{x \to \pm c} f(x) = \pm\infty$

Il primo caso ha il nome di asintoto orizzontale, il secondo asintoto obliquo, il terzo asintoto verticale: in tutti e tre i casi l'osservazione si riferisce a posizioni particolari tra il grafico di $f(x)$ e quello di alcune rette.