ANALISI

Argomenti della Lezione

24 novembre 2011

22. La formula di Taylor

É stato osservata l'approssimazione lineare che consente, per ogni funzione derivabile $f(x)$, l'espressione

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_1(x)$$

con la correzione $R_1(x)$ infinitesima per $x \to x_0$ di ordine superiore al primo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} = 0$$

Lo scopo della formula di Taylor é quello di servirsi, in luogo del semplice polinomio di primo grado

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

di polinomi $T_n(x)$ di grado $n > 1$ che garantiscano per

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

correzioni $R_n(x)$ infinitesime di ordine superiore al $n-$esimo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

22.0.1. *Interpretazione geometrica.*

L'approssimazione lineare vuol dire approssimazione del grafico con la retta tangente, approssimazioni migliori si ottengono ricorrendo a curve che si adattino ancora meglio al grafico.
Ad esempio se $f(x) = x^2$, scelto $x_0 = 1$ l'approssimazione lineare offre

$$T_1(x) = 1 + 2(x - 1), \quad x^2 = T_1(x) + R_1(x)$$

Servendosi invece di polinomi di grado piú alto, ad esempio $n = 2$ si puó scegliere $T_2(x) = 1 + 2(x - 1) + (x - 1)^2$ che approssima il grafico di x^2 assai meglio: infatti

$$x^2 = T_2(x) + R_2(x)$$

con correzione $R_2(x)$ addirittura zero!

Ancora ad esempio, se $f(x) = \cos(x)$ e $x_0 = 0$ l'approssimazione lineare produce $T_1(x) = 1$ che ha come grafico la retta orizzontale $y = 1$, tangente al grafico di $f(x) = \cos(x)$ in $x_0 = 0$.

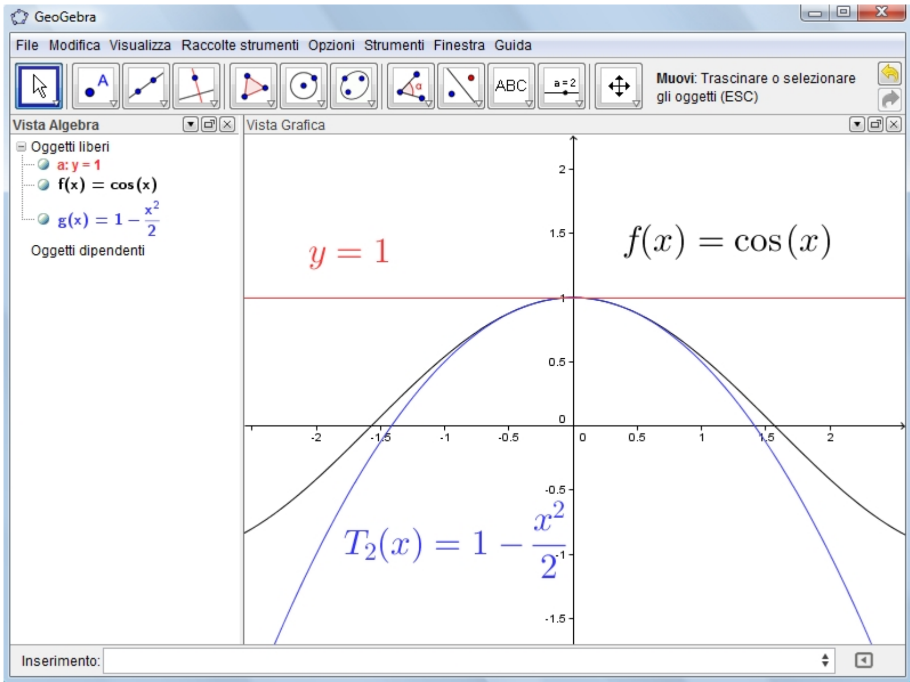

FIGURA 1. $\cos(x)$, retta tangente, parabola tangente.

Servendosi di polinomi di secondo grado si puó scegliere

$$T_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

$T_2(x)$ rappresenta una parabola che approssima il grafico di $\cos(x)$ per $x \approx 0$ evidentemente meglio, vedi figura 1, di quanto facesse la retta tangente.

22.1. Un Lemma.

Lemma 22.1. *Sia $f(x)$ una funzione indefinitamente derivabile in $[a, b]$ tale che nel punto $x_0 \in [a, b]$ riesca*

$$f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{[m]}(x_0) = 0$$

Allora esiste $\xi \in (x, x_0)$ tale che

$$\frac{f(x)}{(x - x_0)^{m+1}} = \frac{f^{[m+1]}(\xi)}{(m+1)!}$$

DIMOSTRAZIONE. Il risultato discende direttamente dal Teorema di Cauchy applicato nell'intervallo $[x, x_0]$ alle due funzioni

$$f(x), \qquad g(x) = (x - x_0)^{m+1}$$

Si noti che la seconda funzione vale zero $x = x_0$ e ha le prime m derivate

$m(x-x_0)^m, \quad m(m-1)(x-x_0)^{m-1}, \quad \dots \quad (m+1)!(x-x_0), \quad (m+1)!$

anch'esse uguali a zero per $x = x_0$.

La funzione $g(x) = (x-x_0)^{m+1}$ come pure le sue prime m derivate sono sempre diverse da zero $x \neq x_0$: tanto garantisce la legittimitá di porle piú volte a denominatore.

$\boxed{\text{Primo passo}}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}$$

$\boxed{\text{Secondo passo}}$

$$\frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} = \frac{f'(x_1) - f'(x_0)}{g'(x_1) - g'(x_0)} = \frac{f''(x_2)}{g''(x_2)}$$

$\boxed{m-\text{esimo passo}}$

$$\frac{f^{[m]}(x_m)}{g^{[m]}(x_m)} = \frac{f^{[m]}(x_m) - f^{[m]}(x_0)}{g^{[m]}(x_m) - g^{[m]}(x_0)} = \frac{f^{[m+1]}(x_{m+1})}{g^{[m+1]}(x_{m+1})}$$

A questo punto le iterazioni si arrestano perché non siamo piú autorizzati a sottrarre a numeratore e a denominatore i valori in x_0.
Uguagliando dalla prima relazione all'$m-$esima si ottiene

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{[m+1]}(x_{m+1})}{g^{[m+1]}(x_{m+1})}$$

che produce la tesi, chiamando ξ l'ultimo dei punti di Cauchy x_{m+1}

$$\frac{f(x)}{(x - x_0)^{m+1}} = \frac{f^{[m+1]}(\xi)}{(m+1)!}$$

□

Esempio 22.2. *La funzione*

$$f(x) = \cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2$$

é tale che

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) = 0$$

allora per il Lemma precedente abbiamo che

$$\frac{f(x)}{x^3} = \frac{1}{3!}f^{[3]}(\xi)$$

ovvero

$$f(x) = \frac{x^3}{3!} f^{[3]}(\xi) \quad \to \quad \cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2 = \frac{x^3}{3!} f^{[3]}(\xi)$$

Si tratta di una relazione non banale: infatti da essa segue

$$\left|\cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2\right| = \frac{|x|^3}{3!}\left|f^{[3]}(\xi)\right|$$

Tenuto conto che

$$f^{[3]}(x) = \cos^{[3]}(x) = \sin(x) \quad \to \quad \left|f^{[3]}(\xi)\right| = |\sin(\xi)| \leq 1$$

riesce

$$\left|\cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2\right| \leq \frac{|x|^3}{3!}$$

Cosí, ad esempio possiamo riconoscere che

$$\cos(0.1) \approx 1 - \frac{1}{2}(0.1)^3 = 1 - \frac{1}{2000} = 0,9995$$

con un un errore minore di

$$\frac{|0.1|^3}{3!} = \frac{1}{6000} \approx 0.00016$$

22.2. Il polinomio di Taylor.

Definizione 22.3. *Sia $f(x)$ indefinitamente derivabile in $[a,b]$: assegnato $x_0 \in [a,b]$ e scelto l'intero m il polinomio*

$$T_m(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \frac{f^{[m]}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m$$

si dice polinomio di Taylor di $f(x)$ di grado m e di punto iniziale x_0.

Proposizione 22.4. *Sia $f(x)$ indefinitamente derivabile in $[a,b]$ la differenza $d(x) = f(x) - T_m(x)$ soddisfa nel punto x_0 le condizioni*

$$d(x_0) = 0, \quad d'(x_0) = 0, \dots, d^{[m]}(x_0) = 0$$

Dimostrazione. Il risultato é evidente dal momento che il polinomio $T_m(x)$ soddisfa le condizioni

$$T_m(x_0) = f(x_0),\, T'_m(x_0) = f'(x_0), \dots, T_m^{[m]}(x_0) = f^{[m]}(x_0)$$

□

Teorema 22.5 (Formula di Taylor)**.** *Sia $f(x)$ indefinitamente derivabile in $[a,b]$: assegnato $x_0 \in [a,b]$ e scelto l'intero m esiste $\xi \in [x_0, x]$ tale che*

$$f(x) = T_m(x) + \frac{f^{[m+1]}(\xi)}{(m+1)!}(x - x_0)^{m+1}$$

DIMOSTRAZIONE. La precedente Proposizione 22.4 garantisce che

$$f(x) - T_m(x) = \frac{\left(f^{[m+1]}(\xi) - T_m^{[m+1]}(\xi)\right)}{(m+1)!}(x - x_0)^{m+1}$$

da cui l'asserto tenendo conto che la derivata $T_m^{[m+1]}(\xi)$ di un polinomio di grado non superiore ad m é nulla. □