ANALISI

Argomenti della Lezione

25 novembre 2011

23. Formula di Taylor

23.1. Esperimenti.

$\boxed{\text{Il caso della funzione } e^x}$

I polinomi di Taylor associati a e^x e alla scelta di $x_0 = 0$ sono

$$T_m(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{m!}x^m$$

da cui

$$e^x = T_m(x) + R_m(x)$$

L'espressione del resto trovata é

$$R_m(x) = \frac{e^\xi}{(m+1)!}x^{m+1}$$

essendo ξ un punto opportuno, dipendente da x e tale che

$$|\xi| \leq |x|$$

Riesce quindi

$$\left| e^x - \left\{ 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{m!}x^m \right\} \right| = \left| \frac{e^\xi}{(m+1)!}x^{m+1} \right|$$

Se immaginiamo di lavorare con $x \in [-M, M]$ si ha

(1)
$$\left| e^x - \left\{ 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{m!}x^m \right\} \right| = e^M \left| \frac{1}{(m+1)!}x^{m+1} \right|$$

Ricordando la serie esponenziale

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

si riconosce che i polinomi di Taylor $T_m(x)$ non sono altro che le somme parziali della serie esponenziale

$$T_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!}$$

e quindi la precedente (1) dice null'altro che

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!}\right| = e^M \left|\frac{1}{(m+1)!}x^{m+1}\right|$$

ovvero, tenuto conto che

$$\lim_{m\to\infty} e^M \left|\frac{1}{(m+1)!}x^{m+1}\right| = 0,$$

si ha, cosa per altro giá nota,

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

$\boxed{\text{Il caso della funzione } \sin(x)}$

I polinomi di Taylor relativi a $\sin(x)$ e al punto iniziale $x_0 = 0$ si determinano agevolmente ricordando che

- $\sin(0) = 0$
- le derivate di $\sin(x)$ di ordine pari sono $\pm\sin(x)$ e quindi sono tutte zero in $x_0 = 0$,
- quelle di ordine dispari sono $\pm\cos(x)$ e quindi valgono ± 1 alternandosi.

Riesce pertanto

$$\begin{aligned}
T_1(x) &= x \\
T_2(x &= x \\
T_3(x) &= x - \frac{1}{3!}x^3 \\
T_4(x) &= x - \frac{1}{3!}x^3 \\
T_5(x) &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \\
T_6(x) &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \\
\dots
\end{aligned}$$

Quindi

$$T_{2m+1}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \dots \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

Riesce inoltre

$$|\sin(x) - T_{2m+1}(x)| = |R_{2m+1}(x)|$$

con

$$|R_{2m+1}(x)| = \frac{1}{(2m+2)!}|\cos(\xi)||x|^{2m+2} \leq \frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!}$$

e quindi

$$|\sin(x) - T_{2m+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!} \tag{2}$$

Considerata la serie di potenze

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \dots \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

si riconosce che:

- i polinomi di Taylor trovati sono null'altro che le somme parziali della serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$
- la (2) equivale a dire che
$$\left| \sin(x) - \sum_{k=0}^{2m+1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \right| \leq \frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!}$$

Ovvero, tenuto conto che, qualunque sia x riesce

$$\lim_{m\to\infty} \frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!} = 0$$

si riconosce che le somme parziali

$$\sum_{k=0}^{2m+1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

convergono a $\sin(x)$, ovvero

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

Il caso della funzione $\cos(x)$

Il caso di $\cos(x)$ é analogo a quello di $\sin(x)$: nel punto $x_0 = 0$ si ha

- $\cos(0) = 1$
- tutte le derivate dispari vengono $\pm sin(x)$ e quindi nulle nel punto $x_0 = 0$,
- tutte le derivate pari vengono $\pm\cos(x)$ e quindi vengono ± 1 alternandosi.

Riesce pertanto

$$T_{2m}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \cdots + \frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}$$

La relazione tra $\cos(x)$ e i polinomi di Taylor associati

$$|\cos(x) - T_{2m}(x)| = |R_{2m}(x)|$$

beneficia per il resto $R_{2m}(x)$ della stessa espressione e quindi maggiorazione

$$|R_{2m}(x)| = \frac{1}{(2m+1)!}|\sin(\xi)||x|^{2m+1} \le \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

ovvero, introdotta la serie di potenze,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k)!}x^{2k}$$

si riconosce che le somme parziali approssimano $\cos(x)$

$$\left|\cos(x) - \sum_{k=0}^{2m} \frac{(-1)^k}{2k)!}x^{2k}\right| \le \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

ovvero che, qualunque sia x, riesce

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k)!}x^{2k}$$

Osservazione 23.1. *Le due serie di potenze osservate sopra, convergenti qualunque sia x a $\sin(x)$ e a $\cos(x)$, suscitano qualche sorpresa:*

- *le funzioni $\sin(x)$ e $\cos(x)$, legate alla circonferenza goniometrica, sono periodiche: é molto strano che somme di potenze di x quali quelle delle due serie osservate siano periodiche,*
- *la coincidenza osservata permette di conoscere le somme di tali serie in punti sorprendenti tipo*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\pi^{2k+1} = 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1} = 1$$

- *la formula di derivazione* $(\sin(x))' = \cos(x)$ *riappare come legame tra le due serie: infatti derivando i termini della serie di* $\sin(x)$
$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$
si perviene ai termini
$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$
esattamente ai termini che costituiscono la serie di $\cos(x)$.

23.2. La classificazione dei punti a derivata nulla. Se una funzione (indefinitamente derivabile) ha in un punto x_0 interno all'intervallo in cui é definita derivata nulla sorge immediatamente il problema di decidere se in tale punto si incontri un punto di minimo relativo o di massimo relativo.

La risposta viene in genere dedotta facilmente dal segno della derivata seconda $f''(x_0)$:

- se $f''(x_0) > 0$ allora si ragiona in termini di permanenza del segno e si finisce per riconoscere che la derivata prima in un intorno di x_0 risulta crescente, tanto basta ad assicurarsi che in x_0 si incontra un punto di minimo relativo,
- se $f''(x_0) < 0$ il ragionamento si inverte e si riconosce che la derivata prima in un intorno di x_0 risulta decrescente, tanto basta ad assicurarsi che in x_0 si incontra un punto di massimo relativo.

É evidente che le conclusioni precedenti non si possono raggiungere nel caso che $f''(x_0) = 0$.

Supponiamo dunque che nel punto x_0 riescano nulle le prime $m-1$ derivate e la derivata $m-$esima sia diversa da zero: il polinomio di Taylor di ordine m relativo al punto x_0 si riduce pertanto a
$$T_m(x) = f(x_0) + \frac{f^{[m]}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m$$
e quindi si ha
$$f(x) = T_m(x) + R_m(x) \quad \to$$
$$\to \quad f(x) - f(x_0) = \frac{f^{[m]}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + \frac{f^{[m+1]}(\xi)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}$$
La decisione se in x_0 cada un minimo relativo o un massimo relativo corrisponde a che la differenza
$$f(x) - f(x_0)$$

sia rispettivamente

positiva	x_0 é punto di minimo
negativa	x_0 é punto di massimo

Basta quindi riconoscere il segno dell'espressione a secondo membro

$$\frac{f^{[m]}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + \frac{f^{[m+1]}(\xi)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}$$

raccogliendo $(x-x_0)^m$ a fattore comune si ottiene

$$(x-x_0)^m \left\{ \frac{f^{[m]}(x_0)}{m!} + \frac{f^{[m+1]}(\xi)}{(m+1)!}(x-x_0) \right\}$$

- il segno del fattore fra parentesi graffe é, per $|x-x_0|$ sufficientemente piccolo, il segno del primo addendo, cioé quello di $f^{[m]}(x_0)$
- il segno del primo fattore, $(x-x_0)^m$ é costantemente positivo se m é pari, varia a seconda che x stia sinistra o a destra di x_0 se m é dispari.

Riassumendo

- Se la prima derivata diversa da zero in x_0 é di grado dispari in x_0 non cadono né minimi né massimi relativi,
- Se la prima derivata diversa da zero in x_0 é di grado pari
  - se $f^{[m]}(x_0) > 0$ in x_0 c'é un minimo relativo,
  - se $f^{[m]}(x_0) < 0$ in x_0 c'é un massimo relativo.