ANALISI

Argomenti della Lezione

30 novembre 2011

24. Comportamento asintotico

- asintoti all'infinito,
- asintoti verticali.

Il termine asintoto per una funzione $f(x)$ si riferisce a rette che abbiano una relazione particolare con il grafico di una funzione:

- gli asintoti all'infinito si riferiscono a rette $y = mx + q$ tali che
$$\lim_{x\to\infty} \{f(x) - (mx+q)\} = 0$$
- gli asintoti verticali sono rette $x = x_0$ tali che uno almeno dei due limiti
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

Tra gli asintoti all'infinito si distinguono in genere

- quelli orizzontali, rette $y = \ell$
- quelli obliqui, rette $y = mx + q$.

Gli asintoti orizzontali si hanno se esiste

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell$$

Gli asintoti obliqui hanno due coefficienti $m,\ q$:

$$\lim_{x\to\infty} \{f(x) - (mx+q))\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m \\ \\ \displaystyle\lim_{x\to\infty} \{f(x) - mx\} = q \end{cases}$$

Osservazione 24.1. *Le funzioni razionali*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

con grado$(P(x)) \leq$ *grado*$(Q(x)) + 1$ *sono i casi piú comuni che offrono asintoti all'infinito.*
La divisione euclidea fra polinomi permette infatti di scrivere

$$P(x) = q(x)Q(x) + r(x) \quad \to \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$$

con grado$(q(x)) \leq 1$, *grado*$(r(x)) <$ *grado*$(Q(x))$ *circostanza che implica*

$$\lim_{x\to\infty} \{f(x) - q(x)\} = 0$$

Esempio 24.2. *La funzione*

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

Esiste l'asintoto orizzontale $y = 0$.

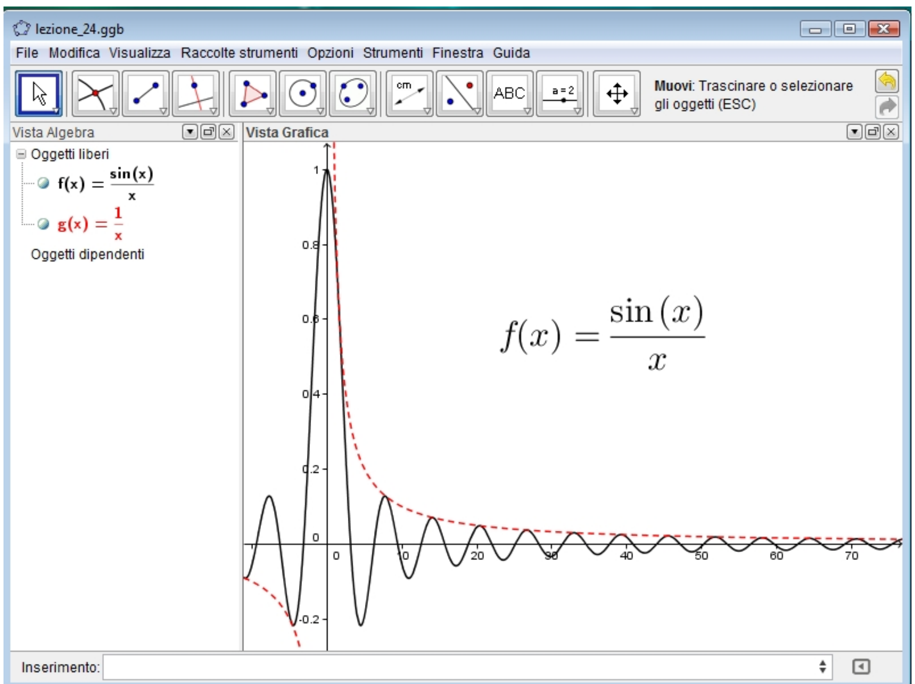

FIGURA 1. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

Esempio 24.3. *La funzione*

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} + mx$$

ha ovviamente l'asintoto obliquo $y = mx$

Esempio 24.4. *La funzione razionale*

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x + 1}$$

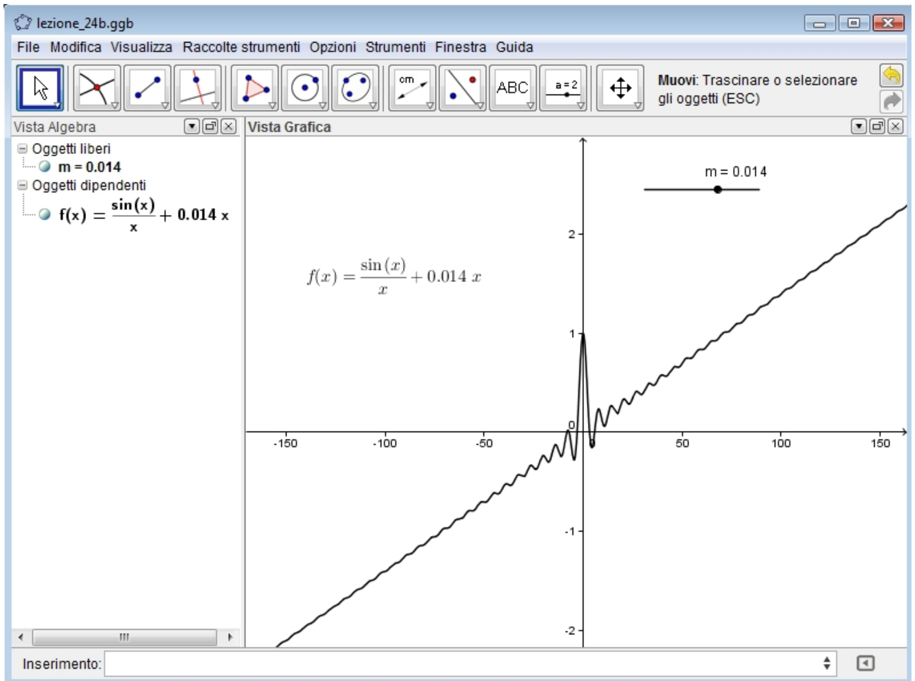

FIGURA 2. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} + mx$

ha un asintoto obliquo: si puó infatti eseguire la divisione euclidea

$$x^2 - 1 = \left\{\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right\}\{3x+1\} - \frac{8}{9}$$

da cui

$$\frac{x^2-1}{3x+1} = \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} - \frac{8/9}{3x+1}$$

Ne segue pertanto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{3x+1} - \left\{\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right\} = 0$$

da cu8i la retta

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$$

é un asintoto all'infinito obliquo.

24.1. Il teorema di Hopital.

Nel caso $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ il limite

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

é garantito dall'esistenza del limite

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f'(x)}{1}=\lim_{x\to\pm\infty}f'(x)$$

L'esistenza di tale limite corrisponde, geometricamente, all'avvicinarsi del grafico di $f(x)$ al suo asintoto in modo monotono: cosa che non é in generale necessaria.

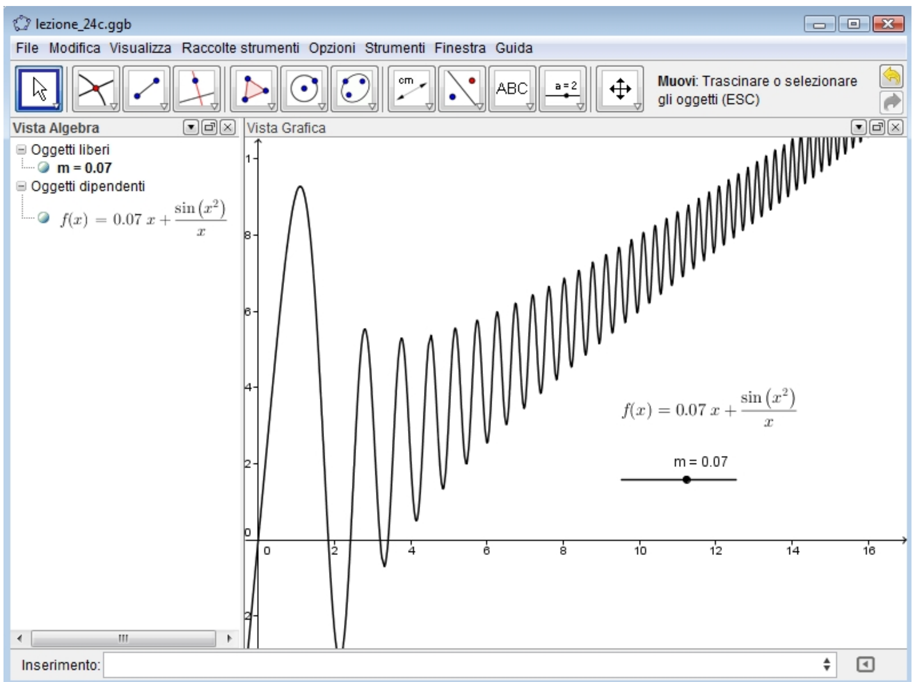

FIGURA 3. $f(x)=\dfrac{\sin(x^2)}{x}+mx$

Esempio 24.5. *Si consideri la funzione*

$$f(x)=\frac{\sin(x^2)}{x}+mx$$

il cui grafico ha l'asintoto obliquo $y=mx$.
Tuttavia riesce

$$f'(x)=m+2\cos(x^2)-\frac{\sin(x^2)}{x^2}$$

espressione che non ammette limite all'infinito.

25. Funzioni convesse

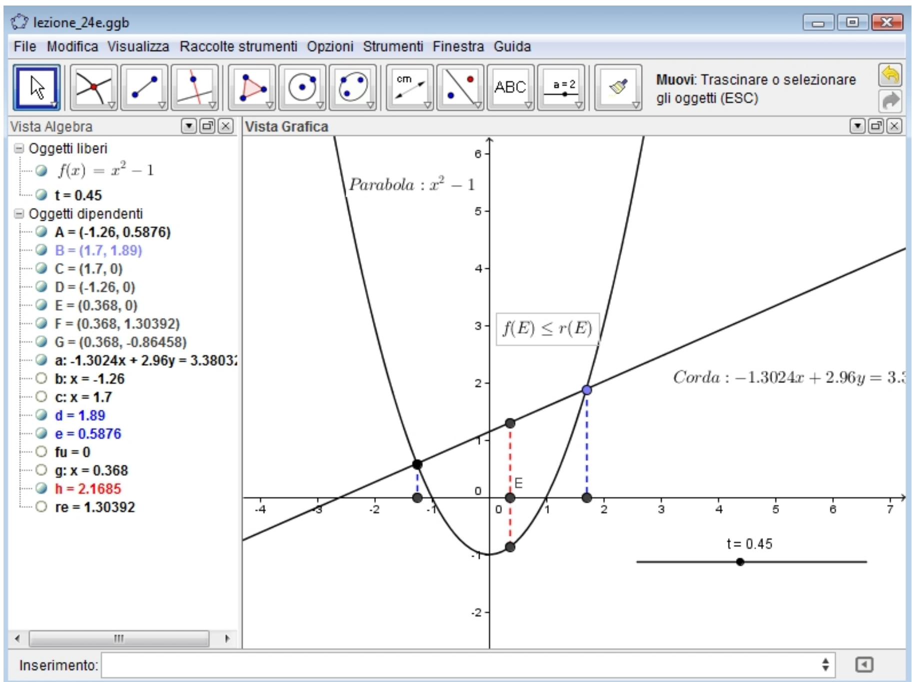

FIGURA 4. La convessitá della parabola.

Definizione 25.1.

$$\forall t \in [0,1]: \; f\left(tx + (1-t)y\right) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Le piú semplici funzioni convesse sono le costanti e le funzioni lineari $ax+b$: é convessa anche la funzione $|x|$.

Proposizione 25.2. *Una combinazione lineare a coefficienti non negativi di due funzioni convesse é convessa.*

Proposizione 25.3. *Se $f(x)$ e $g(x)$ sono convesse tale riesce anche $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$.*

Proposizione 25.4. *Se f é convessa allora é convessa anche la sua parte positiva $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$.*

Si noti che, invece se f convessa $|f|$ puó non essere convessa.
Sia $z \in [x, y]$ cioé sia

$$z = tx + (1-t)y \quad \to \quad z - y = t(x-y) \quad \to \quad t = \frac{y-z}{y-x}$$

quindi

$$z = \frac{y-z}{y-x}\,x + \left(1 - \frac{y-z}{y-x}\right) y$$

La proprietá di convessitá quindi implica

$$f(z) \leq \frac{y-z}{y-x}\,f(x) + \left(1 - \frac{y-z}{y-x}\right)\,f(y)$$

da cui segue

$$f(z) - f(y) \leq \frac{y-z}{y-x}\,\left(f(x) - f(y)\right)$$

ovvero ancora

$$\frac{f(z) - f(y)}{y-z} \leq \frac{f(x) - f(y)}{y-x}$$

da cui cambiando segno, e quindi rovesciando la disuguaglianza,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y-z} \tag{1}$$

Lo stesso z puó del resto essere letto anche come

$$z = (1-\tau)x + \tau y, \quad \to \quad \tau = \frac{x-z}{x-y}$$

e pervenire alla relazione di convessitá

$$f(z) \leq \left(1 - \frac{x-z}{x-y}\right) f(x) + \frac{z-x}{y-x} f(y)$$

dalla quale discende in modo analogo al caso precedente

$$f(z) - f(x) \leq \frac{z-x}{y-x}\left(f(y) - f(x)\right)$$

ovvero

$$\frac{f(z) - f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y-x} \tag{2}$$

Riassumendo le (1) e (2) si ottiene

$$\frac{f(z) - f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y-z}$$

Relazione che puó essere interpretata geometricamente osservando che le tre frazioni rappresentano i coefficienti angolari di tre rette secanti:

- la prima per i punti $(x, f(x)),\ (z, f(z))$
- la seconda per i punti $(x, f(x)),\ (y, f(y))$
- la terza per i punti $(z, f(z)),\ (y, f(y))$

Lemma 25.5. *Se f é convessa ed é derivabile allora f' é crescente.*

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza (2), passando al limite per $z \to x$ si ha

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

mentre dalla (1), passando al limite per $z \to y$ si ha

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y)$$

da cui discende

$$f'(x) \leq f'(y)$$

□

Corollario 25.6. *Se f é convessa ed é derivabile due volte allora $f'' \geq 0$.*

Proposizione 25.7. *Sia f continua e derivabile due volte in $[a, b]$: allora se $f''(x) \geq 0$ la funzione é convessa.*

Dimostrazione. Per riconoscere che valga la relazione di convessitá posto

$$F(t) = tf(x) + (1-t)f(y) - f[tx + (1-t)y]$$

proviamo che riesce $F(t) \geq 0$ ovvero

$$\min_{t \in [0,1]} F(t) \geq 0$$

Il minimo e il massimo di F si trovano in corrispondenza dei punti interni in cui $F'(t) = 0$ o agli estremi dell'intervallo.

$$F'(t) = f(x) - f(y) - f'[tx + (1-t)y](x-y) = \{f'\xi) - f'[tx + (1-t)y]\}(x-y)$$

e quindi

$$F''(t) = -f''[tx + (1-t)y](x-y)^2$$

L'ipotesi $f''(x) > 0$ garantisce che $f'(x)$ sia crescente e quindi che la derivata $F'(t)$ si annulla in un solo punto $t^*x + (1-t^*)y = \xi$. In tale punto riesce

$$F''(t^*) = -f''[t^*x + (1-t^*)y](x-y)^2 \quad \to \quad F''(t^*) < 0$$

e quindi tale punto é punto di massimo.
Il minimo si raggiunge quindi necessariamente agli estremi dell'intervallo e, essendo

$$F(0) = F(1) = 0$$

vale zero. Quindi

$$\forall t \in [0,1] : \quad F(t) \geq 0 \quad \to \quad f[tx + (1-t)y] \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

□

25.1. Una funzione convessa famosa. La disuguaglianza famosa
$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$
valida per ogni coppia di numeri a, b si estende, nel caso $a \geq 0, b \geq 0$ alla
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \forall p, q > 1 : \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$
Consideriamo infatti, scelto $b \geq 0$ la funzione
$$F(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{b^q}{q} - bt, \qquad t \geq 0$$
Tenuto conto che
$$F'(t) = t^{p-1} - b, \quad F''(t) = (p-1)t^{p-2} \geq 0$$
si riconosce che $F(t)$ é convessa e che, quindi il punto
$$\tau = b^{\frac{1}{p-1}}$$
in cui si annulla la derivata prima é punto di minimo. Riesce del resto
$$F(\tau) = \frac{b^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{b^q}{q} - b^{\frac{1}{p-1}+1}$$
tenuto conto che
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{p}{p-1} = q$$
si ha
$$F(\tau) = b^q \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \right\} = 0$$
Da cui segue, tenuto conto che $F(\tau)$ é il minimo
$$\forall t \geq 0 : \ F(t) \geq 0 \quad \rightarrow \quad bt \leq \frac{t^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$
da cui la tesi per $t = a$.

26. Ordini di infinito e di infinitesimo

Definizione 26.1. *Due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ tali che $\lim_{x\to\infty} |f(x)| = \lim_{x\to\infty} |g(x)| = \infty$ si dicono due infiniti per $x \to \infty$.*
Se inoltre
$$\lim_{x\to\infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \infty$$
si dice che $f(x)$ é un infinito di ordine superiore.

Se invece

$$0 < C_1 \leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq C_2$$

si dice che sono infiniti dello stesso ordine.

La possibilitá di confrontare due diversi infiniti suggerisce

- di scegliere una unitá di misura, cioé un infinito campione $u(x)$,
- dichiarare infiniti di ordine $2, 3, \ldots$ tutti quelli che risultano infiniti dello stesso ordine di $u^2(x)$, $u^3(x), \ldots$.

Osservazione 26.2. *Il confronto con x^α dei due infiniti*

$$\log(x), \qquad e^x$$

produce qualche sorpresa:

- $\log(x)$ *é un infinito per $t \to +\infty$ di ordine piú basso di qualunque potenza x^λ,*
- e^x *é un infinito per $t \to +\infty$ di ordine piú alto di qualunque potenza x^λ.*

Definizione 26.3. *Due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ tali che $\lim x \to x_0 |f(x)| = \lim x \to x_0 |g(x)| = 0$ si dicono due infinitesimi per $x \to x_0$.*
Se inoltre

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$$

si dice che $f(x)$ é un infinitesimo di ordine superiore.
Se invece

$$0 < C_1 \leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq C_2$$

si dice che sono infinitesimi dello stesso ordine.

26.1. Simboli di Landau.

Esistono due simboli tipografici

$$o \qquad O$$

Per quanto riguarda il primo, dire che

$$f = o(g) \quad \Leftrightarrow \quad \lim \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Per quanto riguarda il secondo, dire che

$$f = O(g) \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq C$$

Dire che una funzione é derivabile nel punto x corrisponde ad avere, con il simbolo di Landau

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h)$$

Indicato con

$$df(x,h) = f'(x)h$$

o semplicemente con df la derivabilitá significa

$$|\triangle f - df| = o(h)$$

Esempio 26.4. *Sia $g(x)$ una funzione limitata per $x \in (-\rho, \rho)$ e sia $f(x)$ una funzione derivabile in $x_0 = 0$ allora la funzione*

$$F(x) = f(x) + |x|^{\alpha}\, g(x), \qquad \alpha > 1$$

é derivabile in $x_0 = 0$.
Il grafico di $F(x)$ ha in $x_0 = 0$ la stessa tangente che aveva il grafico di $f(x)$.