ANALISI

Argomenti della Lezione

14 dicembre 2011

25. Funzioni costanti a tratti

Sia $f(x)$ una funzione costante a tratti in $[a,b]$, cioé:

- esiste una partizione di $[a,b] = [\xi_0, \xi_1] \cup [\xi_1, \xi_2] \cup \dots [\xi_{n-1}, \xi_n]$ con $\xi_0 = a,\ \xi_n = b$
- esistono n valori $c_1,\ c_2,\ \dots c_n$ tali che

$$\forall x \in [\xi_{k-1}, \xi_k) :\ f(x) = c_k$$

Esempio 25.1. *Le piú comuni funzioni costanti a tratti derivano da composizioni che coinvolgano la funzione* **`parte intera`**, *ovvero la* **`Floor(x)`**.

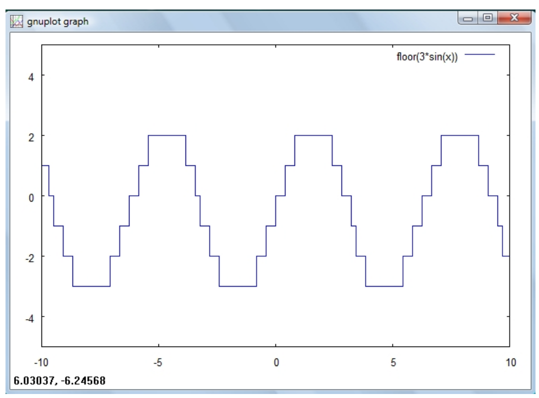

Figura 1. $f(x) = \text{floor}(3\sin(x))$

Si pensi a $f(x) = floor(10\sin(x))$, *vedi fig. 1, oppure a* $f(x) = 3\cos(floor(x/3))$ *vedi fig. 2.*

Una stessa funzione $f(x)$ costante a tratti su un intervallo $[a,b]$ ammette rappresentazioni diverse, riferite a partizioni diverse di $[a,b]$, si puó infatti, ad esempio proporre una partizione piú fine, decomponendo il primo intervallino in due parti

$$[\xi_0,\ \xi_1] = [\xi_0,\ \beta] \cup [\beta,\ \xi_1]$$

e attribuendo, ovviamente, in ciascuna delle due parti lo stesso valore c_1 per la funzione.

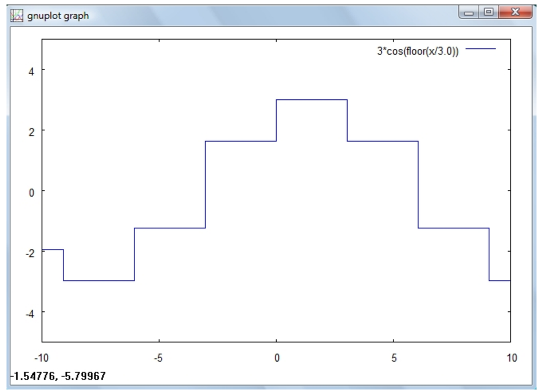

FIGURA 2. $f(x) = 3\cos(\text{floor}(x/3))$

Proposizione 25.2. *Se $f(x)$ é una funzione costante a tratti in $[a, b]$ allora anche ogni sua restrizione a intervalli $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$ é una funzione costante a tratti in $[\alpha, \beta]$.*

DIMOSTRAZIONE. ....ovvia. $\square$

Proposizione 25.3. *Siano $\forall x \in [\xi_{k-1}, \xi_k) : f(x) = c_k,\ k \in [1, n]$ e $\forall x \in [\eta_{k-1}, \eta_k) : f(x) = \beta_k\ k \in [1, m]$ due rappresentazioni della stessa funzione costante a tratti, allora riesce*

$$\sum_{k=1}^{n} c_k(\xi_k - \xi_{k-1}) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k(\eta_k - \eta_{k-1})$$

DIMOSTRAZIONE. ....omessa (non ovvia). $\square$

Definizione 25.4. *Assegnata una funzione costante a tratti in $[a, b]$, sia $\forall x \in [\xi_{k-1}, \xi_k) : f(x) = c_k,\ k \in [1, n]$ una sua rappresentazione, la somma $\sum_{k=1}^{n} c_k(\xi_k - \xi_{k-1})$ si dice integrale di f esteso all'intervallo $[a, b]$ e si indica con la notazione*

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

Osservazione 25.5. *Si osservi che nel caso di $f(x)$* **non negativa** *costante a tratti in $[a, b]$ l'integrale di f esteso all'intervallo $[a, b]$ rappresenta l'area del plurintervallo sottografico di f su $[a, b]$.*

Proposizione 25.6 (Linearitá)**.** *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni costanti a tratti su $[a,b]$, qualunque siano le costanti α, β riesce*

$$\int_a^b \{\alpha f(x) + \beta g(x)\}\, dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

Proposizione 25.7 (Additivitá)**.** *Sia $f(x)$ non negativa costante a tratti in $[a,b]$, $\forall c \in [a,b]$ riesce*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Proposizione 25.8 (Monotonia)**.** *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni costanti a tratti su $[a,b]$ e tali che $f(x) \leq g(x)$ allora riesce anche*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Corollario 25.9. *Sia $f(x)$ costante a tratti in $[a,b]$ detti m ed M il minimo e il massimo di $f(x)$ in $[a,b]$ riesce*

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \leq M$$

Assegnata una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e assegnata una partizione

$$[a,b] = [\xi_0, \xi_1] \cup [\xi_1, \xi_2] \cup \ldots [\xi_{n-1}, \xi_n]$$

con $\xi_0 = a,\ \xi_n = b$ indichiamo con $\underline{f}(x),\ \overline{f}(x)$ le due funzioni costanti a tratti

$$\begin{array}{ll} \underline{f}(x) : \forall x \in [\xi_{k-1}, \xi_k) : \ \underline{f}(x) = \inf\limits_{x \in [\xi_{k+1}, \xi_k]} f(x) & k \in [1,n] \\ \overline{f}(x) : \forall x \in [\xi_{k-1}, \xi_k) : \ \overline{f}(x) = \sup\limits_{x \in [\xi_{k+1}, \xi_k]} f(x) & k \in [1,n] \end{array}$$

Proposizione 25.10. *Qualunque siano due decomposizioni di $[a,b]$ e $\underline{f}$ e $\overline{f}$ le funzioni costanti a tratti relative ad f e alle due decomposizioni riesce*

$$\int_a^b \underline{f}(x)dx \leq \int_a^b \overline{f}(x)dx$$

Dimostrazione. Se le due decomposizioni sono la stessa, la relazione corrisponde alla proprietá di monotonia osservata sopra.
Se le due decomposizioni sono differenti la dimostrazione (non banale) é omessa. □

Definizione 25.11. *Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata si dice integrabile in $[a,b]$ se*

$$\sup \int_a^b \underline{f}(x)\,dx = \inf \int_a^b \overline{f}(x)\,dx$$

Il comune valore dei due estremi si dice integrale di $f(x)$ esteso all'intervallo $[a,b]$ e si indica con

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Teorema 25.12. *Esistono funzioni $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e non integrabili in $[a,b]$.*

Dimostrazione. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ nulla sui razionali e uguale ad 1 sugli irrazionali. Riesce di conseguenza, qualunque sia la decomposizione scelta

$$\underline{f}(x) \equiv 0, \quad \overline{f}(x) \equiv 1$$

Pertanto, qualunque sia la decomposizione riesce

$$\int_a^b \underline{f}(x)dx = 0, \quad \int_a^b \overline{f}(x)dx = b-a$$

e quindi

$$\sup \int_a^b \underline{f}(x)\,dx \neq \inf \int_a^b \overline{f}(x)\,dx$$

$\square$

Corollario 25.13. *Sia $f(x)$ integrabile in $[a,b]$ e riesca $\forall x \in [a,b]$: $m \leq f(x) \leq M$ allora riesce*

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

Teorema 25.14. *Le funzioni $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e monotone sono integrabili in $[a,b]$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $f(x)$ sia monotona crescente: allora riesce, per ogni partizione relativa a suddivisione in n parti uguali,

$$\underline{f}_n(x) : \forall x \in [\xi_{k-1}, \xi_k) : \underline{f}_n(x) = \inf_{x \in [\xi_{k+1}, \xi_k]} f(x) = f(\xi_k) \qquad k \in [1,n]$$
$$\overline{f}_n(x) : \forall x \in [\xi_{k-1}, \xi_k) : \overline{f}_n(x) = \sup_{x \in [\xi_{k+1}, \xi_k]} f(x) = f(\xi_{k+1}) \qquad k \in [1,n]$$

$$\int_a^b \overline{f}_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_{k+1})(\xi_{k+1}-\xi_k)$$
$$\int_a^b \underline{f}_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(\xi_{k+1}-\xi_k)$$

da cui segue

$$\int_a^b \overline{f}_n(x)dx - \int_a^b \underline{f}_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k)\}(\xi_{k+1}-\xi_k) =$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k)\} = \frac{b-a}{n}\left(f(b)-f(a)\right)$$

Tenuto presente che

$$\int_a^b \underline{f}_n(x)dx \le \sup \int_a^b \underline{f}(x)dx \le \inf \int_a^b \overline{f}(x)dx \le \int_a^b \overline{f}_n(x)dx$$

ne segue

$$0 \le \inf \int_a^b \overline{f}(x)dx - \sup \int_a^b \underline{f}(x)dx \le \frac{b-a}{n}\left(f(b)-f(a)\right)$$

L'arbitrarietá di n implica quindi

$$\inf \int_a^b \overline{f}(x)dx = \sup \int_a^b \underline{f}(x)dx$$

□

Corollario 25.15. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e monotona: allora riesce*

$$\min\{f(a), f(b)\} \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le \max\{f(a), f(b)\}$$

Teorema 25.16. *Le funzioni $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e lipschitziane sono integrabili in $[a,b]$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $f(x)$ sia lipschitziana (quindi continua): allora riesce, per ogni partizione relativa a suddivisione in n parti uguali,

$$\underline{f}_n(x) : \forall x \in [\xi_{k-1}, \xi_k) : \underline{f}_n(x) = \min_{x\in[\xi_{k+1},\xi_k]} f(x) = f(\alpha_k) \qquad k \in [1,n]$$
$$\overline{f}_n(x) : \forall x \in [\xi_{k-1}, \xi_k) : \overline{f}_n(x) = \max_{x\in[\xi_{k+1},\xi_k]} f(x) = f(\beta_k) \qquad k \in [1,n]$$

da cui segue

$$\int_a^b \overline{f}_n(x)dx - \int_a^b \underline{f}_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \{f(\alpha_k) - f(\beta_k)\} (\xi_{k+1} - \xi_k)$$

Detta L la costante di Lipschitz si ha

$$|f(\alpha_k) - f(\beta_k)| \leq L|\alpha_k - \beta_k| \leq L\frac{b-a}{n}$$

e quindi

$$\left|\int_a^b \overline{f}_n(x)dx - \int_a^b \underline{f}_n(x)dx\right| \leq L\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_{k+1} - \xi_k) = L\frac{(b-a)^2}{n}$$

Ne segue, come osservato precedentemente,

$$0 \leq \inf \int_a^b \overline{f}(x)dx - \sup \int_a^b \underline{f}(x)dx \leq L\frac{(b-a)^2}{n}$$

L'arbitrarietá di n implica quindi

$$\inf \int_a^b \overline{f}(x)dx = \sup \int_a^b \underline{f}(x)dx$$

$\square$

Proposizione 25.17 (Teorema della media)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotona e continua (quindi limitata), oppure lipschitziana*

$$\exists \xi \in [a, b] : \quad \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

Dimostrazione. Siano m ed M il minimo e il massimo di f in $[a, b]$.
Qualunque sia la partizione scelta le corrispondenti funzioni costanti a tratti $\underline{f}$ e $\overline{f}$ danno valori compresi tra m ed M e quindi

$$\begin{cases} m(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b \underline{f}(x)dx \leq M(b-a) \\ m(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b \overline{f}(x)dx \leq M(b-a) \end{cases} \quad \to \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Ne segue pertanto che

$$\lambda = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \in [m, M]$$

Tenuto conto che la funzione continua f produce tutti i valori dell'intervallo $[m,\, M]$ allora esisterá almeno un $\xi \in [a, b]$ in cui riesca $f(\xi) = \lambda$ ovvero

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(\xi)$$

da cui la tesi. $\square$