ANALISI

Argomenti della Lezione

15 dicembre 2011

26. Teorema fondamentale del calcolo

26.1. La notazione.

La tradizionale notazione

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ricorda come il numero detto

integrale di f su $[a, b]$

definito come elemento separatore delle due classi numeriche contigue

$$\left\{\int_a^b \underline{f}(x)dx\right\} \qquad \left\{\int_a^b \overline{f}(x)dx\right\}$$

costruite tramite le funzioni costanti a tratti che verificano su $[a, b]$ le disuguaglianze

$$\underline{f}(x) \leq f(x) \leq \overline{f}(x)$$

dipenda da due oggetti matematici

- la funzione f
- l'intervallo $[a, b]$.

Sarebbe stato sufficiente (e forse opportuno) indicarlo semplicemente come

$$\int_a^b f$$

evidenziando i due soli oggetti che lo determinano.
L'uso, tipografico, della notazione tradizionale, offre qualche altra opportunitá che apparirá nel seguito. Occorre comunque recepire che il nome x dato alla variabile é del tutto inessenziale, e pertanto tutti i seguenti simboli

$$\int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_a^b f(t)\,dt, \quad \int_a^b f(y)\,dy \quad \ldots$$

indicano lo stesso valore.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile: esistono quindi

$$\underline{f}(x) \leq f(x) \leq \overline{f}(x)$$

con

$$\int_a^b \underline{f}(x)dx \approx \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \overline{f}(x)dx$$

é ragionevole pertanto che le proprietá di

- linearitá,
- additivitá,
- monotonia

possedute dall'integrale delle funzioni costanti a tratti si mantengano per gli integrali di tutte le funzioni integrabili.
Accogliamo pertanto la seguente proposizione che raccoglie tutte e tre tali proprietá

Proposizione 26.1. *Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabili:*

- *linearitá: é integrabile ogni loro combinazione lineare $\alpha f(x) + \beta g(x)$ e riesce*

$$\int_a^b \{\alpha f(x) + \beta g(x)\}\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

- *additivitá: f é integrabile in ogni sottointervallo di $[a, b]$ e riesce*

$$\forall c \in [a, b] : \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- *monotonia:*

$$f(x) \leq g(x) \quad \to \quad \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$$

Osservazione 26.2. *Le piú comuni funzioni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ si possono esprimere come somma o differenza di due funzioni monotone*

$$\forall x \in [a, b] : \quad f(x) = p(x) \pm q(x)$$

Le due funzioni p e q sono, in quanto monotone integrabili, e quindi, in base alla precedente proposizione é integrabile f.

Esempio 26.3. *Consideriamo la funzione modulo $|x|$: indicate con*

$$p(x) = \begin{cases} -x & x \leq o \\ 0 & x > 0 \end{cases} \qquad q(x) = \begin{cases} 0 & x \leq o \\ x & x > 0 \end{cases}$$

Le due funzioni p e q sono monotone, quindi integrabili.

Tale riesce quindi anche la funzione modulo in quanto

$$|x| = p(x) + q(x)$$

Altrettanto vera é la seguente

Proposizione 26.4.

- *se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é integrabile in* $[a, b]$ *allora é integrabile in ogni* $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$,
- *se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é integrabile in* $[a, c]$ *e in* $[c, b]$ *allora é integrabile in* $[a, b]$.

Dimostrazione. I due risultati sono ovvi se f appartiene a una almeno delle due grandi classi di funzioni integrabili, quella delle funzioni monotone o quella delle funzioni lipschitziane: é tutt'altro che ovvio nel caso generale.
La dimostrazione nel caso generale é pertanto omessa. □

Osservazione 26.5. *Per le funzioni piú comuni* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é possibile decomporre l'intervallo*

$$[a, b] = [\xi_0, \xi_1] \cup [\xi_1, \xi_2] \cup \ldots [\xi_{n-1}, \xi_n]$$

in un numero finito di intervalli in ciascuno dei quali f *sia monotona, quindi integrabile.*
La proposizione precedente permette quindi di riconoscere la integrabilitá di f *in ciascuno degli intervallini* $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ *e quindi nella loro unione.*

Il primo punto della precedente Proposizione 26.4 consente, data f integrabile in $[a, b]$ di considerare, per ogni $c \in [a, b]$ l'integrale

$$\int_a^c f(x)\, dx$$

e quindi di considerare tale valore come una funzione F dell'estremo c definita per ogni $c \in [a, b]$

$$F(c) = \int_a^c f(x)\, dx$$

ovvero cambiando notazioni

$$\forall x \in [a, b] : \quad F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Teorema 26.6. *[Teorema fondamentale del calcolo] Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile e continua in $[a,b]$: posto per ogni $x \in [a,b]$*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

riesce

- $F(a) = 0$,
- $F'(x) = f(x)$.

Dimostrazione. Sia $h > 0$ e siano $a \le x \le x+h \le b$ si ha

$$\int_a^{x+h} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt$$

ovvero

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt = h\,f(\xi)$$

da cui

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi) \tag{1}$$

Sia ora invece $h < 0$ e siano $a \le x+h \le x \le b$ si ha

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^{x+h} f(t)dt + \int_{x+h}^x f(t)dt$$

ovvero

$$F(x) = F(x+h) + \int_{x+h}^x f(t)dt$$

da cui

$$F(x) - F(x+h) = f(\eta)(-h)$$

da cui, analogamente al caso $h > 0$ si ha

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\eta) \tag{2}$$

Passando al limite per $h \to 0$ e tenendo conto che

$$h \to 0 \quad \to \quad \begin{cases} \xi \to x & \to \quad f(\xi) \to f(x) \\ \eta \to x & \to \quad f(\eta) \to f(x) \end{cases}$$

ne segue la tesi

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

$\square$

Osservazione 26.7. *Si noti che le due proprietá*

$$F(a) = 0, \; F'(x) = f(x),$$

osservate nel precedente Teorema 26.6, identificano la funzione F.
Se infatti esistessero due F_1 e F_2 soddisfacenti a entrambe tali proprietá esse avrebbero differenza $F_1(x) - F_2(x)$ a derivata nulla e quindi, in base al teorema di Lagrange, costante in $[a, b]$.
Del resto $F_1(a) - F_2(a) = 0$ e quindi tale differenza $F_1(x) - F_2(x)$ riuscirebbe identicamente nulla in $[a, b]$ ovvero F_1 ed F_2 sarebbero la stessa funzione.

26.2. L'algoritmo di calcolo.

Il precedente teorema 26.6 consente il calcolo automatico di numerosi integrali: indicata con

$$\forall x \in [a, b] : \; F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

- L'integrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ é il valore $F(b)$,
- La funzione $F(x)$ é una primitiva di $f(x)$,
- tra le tante primitive é quella che vale 0 se $x = a$,
- pertanto se $g(x)$ é una qualsiasi primitiva di $f(x)$ la funzione

  $$g(x) - g(a)$$

  é ancora una primitiva di f e vale 0 nel punto a....

  ..... quindi $g(x) - g(a) = F(x)$

Pertanto

$$F(b) = g(b) - g(a) \quad \to \quad \int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a)$$

Esempio 26.8. *Siano $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$: si tratta di funzioni derivabili con derivata*

$$f_n'(x) = n x^{n-1}$$

continua.
Quindi qualunque sia l'intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ le $f_n(x)$ sono Lipschitziane e quindi integrabili.
Per le corrispondenti

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, dt$$

sappiamo che:

- $F_n'(x) = x^n$,
- $F_n(a) = 0$

Pertanto, ricordando che

$$g_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

é una primitiva di $f_n(x)$ *si ha*

$$F_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

e quindi

$$\int_a^b t^n \, dt = F_n(b) = \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Esempio 26.9. *La osservata linearitá consente quindi di calcolare, in modo automatico, l'integrale di qualunque polinomio:*

$$\int_0^1 \left\{3x^5 + 6x^2 - x + 1\right\} dx = 3\int_0^1 x^5 \, dx + 6\int_0^1 x^2 \, dx - \int_0^1 x \, dx + \int_0^1 1 \, dx = \dots$$