ANALISI

Argomenti della Lezione

21 dicembre 2011

28. Regole di integrazione

Il titolo *Regole di integrazione* si riferisce a un piccolo numero di osservazioni rivolte ad agevolare la ricerca di una primitiva elementare per una funzione elementare assegnata.

Il titolo *elementare* significa appartenente a quella dozzina, piú o meno, di funzioni per le quali é semplice e consolidato il procedimento di derivazione: polinomi, funzioni razionali, seno, coseno, tangente, esponenziali, logaritmi, arcoseno, arcotangente e loro semplici composizioni.

Le regole di integrazione piú frequentemente utilizzate sono l'integrazione per parti e quella per sostituzione.
La regola di integrazione delle funzioni razionali si riferisce piú che altro alla possibilitá, non sempre facile, di esprimere una funzione elementare come somma di funzioni elementari particolarmente semplici

$\boxed{\text{INTEGRAZIONE PER PARTI}}$

Si tratta di una regola che si riferisce a prodotti di funzioni regolari (cioé $C^\infty([a,b])$ sull'intervallo $[a,b]$ su cui deve essere calcolato l'integrale.

Si tratta di una lettura intelligente della regola di derivazione dei prodotti:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \to$$
$$\to \quad f'(x)g(x) = (f(x)g(x))' - f(x)g'(x)$$

da essa segue,

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \int_a^b (f(x)g(x))'\,dx - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

da cui osservando che, dal teorema fondamentale del calcolo,

$$\int_a^b (f(x)g(x))'\,dx = f(x)g(x)\big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

si ottiene

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

formula che esprime l'integrale a primo membro con un'espressione a secondo membro che include un altro integrale, che *potrebbe* essere vantaggioso ai fini della semplicitá di calcolo.

Esempio 28.1. *Si debba calcolare*

$$\int_0^1 xe^x dx$$

- *si deve conoscere per almeno uno dei due fattori del prodotto* xe^x *una primitiva: in questo caso la si conosce per entrambi*
  - $x = \left(\dfrac{x^2}{2}\right)'$
  - $e^x = (e^x)'$.
- *si legge pertanto il prodotto in una delle due forme possibili*

$$xe^x = \left(\frac{x^2}{2}\right)' e^x$$
$$xe^x = x\,(e^x)'$$

- *si ottengono le due espressioni conseguenti*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 xe^x dx = \left.\frac{x^2}{2}e^x\right|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}e^x\,dx \\ \\ \displaystyle\int_0^1 xe^x dx = \left. xe^x\right|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx \end{cases}$$

- *si nota il vantaggio della seconda espressione nella quale l'integrale é calcolabile in quanto disponiamo della primitiva* e^x *della funzione integranda, pertanto*

$$\int_0^1 xe^x dx = \left. xe^x\right|_0^1 - \left. e^x\right|_0^1 = 1$$

Osservazione 28.2. *L'idea di riconosce in un'espressione un prodotto é quanto di piú ingenuo:*

- *ogni espressione* $f(x)$ *puó pensarsi come prodotto*

$$f(x) = 1\,.\,f(x)$$

- *non solo ma anche come*

$$f(x) = g(x)\,\frac{f(x)}{g(x)}$$

con l'unica avvertenza di riferirsi a $g(x)$ *che possano essere messe a denominatore,*
- *o ancora come*

$$f(x) = g_1(x)\frac{g_2(x)}{g_1(x)}\,\frac{g_3(x)}{g_2(x)}\frac{f(x)}{g_3(x)}$$

da cui si riconosce che anche il numero dei fattori puó lievitare a piacere...

Esempio 28.3. *Il procedimento del precedente esercizio puó essere esteso ancora con vantaggio a ogni integrale*

$$\int_a^b x^n e^x\,dx \qquad n \in \mathbb{N}$$

Si ha infatti

$$\int_a^b x^n e^x\,dx = x^n e^x\big|_a^b - n\int_a^b x^{n-1}e^x\,dx$$

espressione nella quale il fatto che l'integrale a secondo membro si riferisca ad una potenza con esponente abbassato di un punto costituisce certamente un vantaggio pensando ad una possibile espressione ricorsiva.
Sia, ad esempio $[a,b] = [0,1]$ *ne segue*

$$\int_0^1 x^n e^x\,dx = e - n\int_0^1 x^{n-1}e^x\,dx$$

da cui posto

$$a_n = \int_0^1 x^n e^x\,dx$$

si ha la successione ricorsiva

$$a_0 = e-1, \quad a_n = e - n a_{n-1}$$

che produce, ad esempio

n	a_n
0	$e-1$
1	1
2	$e-2$
3	$6-2e$
4	$9e-24$
5	$120-44e$
6	$265e-720$

Vantaggi simili a quelli precedenti si incontrano in relazione ad integrali analoghi

$$\int_a^b x^n \sin(x)dx, \quad \int_a^b x^n \cos(x)dx, \quad \int_a^b x^n \log(x)dx, \ldots \quad n \in \mathbb{N}$$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Esistono due modi di pervenire al procedimento di *integrazione per sostituzione* :

- uno, tramite il teorema fondamentale del calcolo, basato sulla regola di derivazione delle funzioni composte,
- il secondo basato su una intelligente manipolazione delle somme integrali stesse.

primo modo:

$$F'(x) = f(x) \quad \to \quad F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Sia ora $g \in C^1(\mathbb{R})$ tenuto conto che

$$(F[g(t)])' = F'[g(t)]g'(t) = f[g(t)]g'(t) \quad \to$$

$$\to \quad F[g(\beta)] - F[g(\alpha)] = \int_\alpha^\beta f[g(t)]g'(t)dt$$

Tenuto conto che se $g(\beta) = b$, $g(\alpha) = a$, $F[g(\beta)] = F(b)$, $F[g(\alpha)] = F(a)$ si ha quindi

$$F(b) - F(a) = \int_\alpha^\beta f[g(t)]g'(t)dt$$

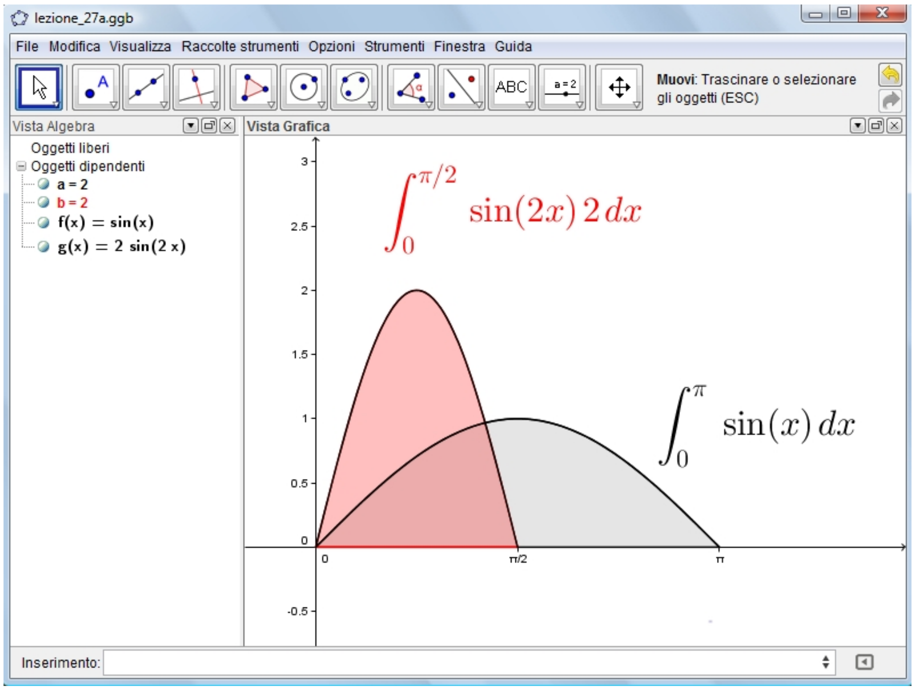

Figura 1. Integrazione per sostituzione

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[g(t)]g'(t)dt$$

da cui la formula

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[g(t)]g'(t)dt$$

In Figura 1 si riconosce l'uguaglianza

$$\int_0^\pi \sin(x)dx = \int_0^{\pi/2} \sin(2t)\,2\,dt$$

i due domini colorati hanno la stessa area.

secondo modo:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(\xi_{k+1} - \xi_k)$$

Tenuto conto che, servendosi della funzione $g \in C^1(\mathbb{R})$

$$\xi_k = g(\tau_k), \quad \xi_{k+1} - \xi_k \approx g'(\tau_k)(\tau_{k+1} - \tau_k, \quad \tau_k \in [\alpha, \beta]$$

e quindi

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(\xi_{k+1}-\xi_k) \approx \sum_{k=1}^{n} f[g(\tau_k)]g'(\tau_k)(\tau_{k+1}-\tau_k)$$

tenuto conto inoltre che l'ultima somma é null'altro che una delle somme integrali generalizzate relative all'integrale

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[g(t)]g'(t)dt$$

si riconosce che se $a = g(\alpha)$ e $b = g(\beta)$ non puó che essere

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[g(t)]g'(t)dt$$

INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI

Alcune funzioni razionali

$$x^m, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^n}, \quad \frac{1}{1+x^2}, \dots$$

si integrano molto facilmente tenuto conto della disponibilitá di loro primitive elementari

$$\frac{x^{m+1}}{m+1}, \quad \log(|x|), \quad \frac{1}{1-n}\frac{1}{x^{n-1}}, \quad \arctan(x), \dots$$

Osservazione 28.4. *Si noti che la primitiva di* $\frac{1}{x}$ *é* $\log(|x|)$ *con il modulo.*
Infatti, se $x > 0$ *il fatto é ovvio, per la nota regola di derivazione del logaritmo.*
Se invece $x < 0$ *allora*

$$\log(|x|) = \log(-x) \quad \to \quad (\log(|x|))' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$$

Ogni funzione razionale

$$f(x) = \frac{1}{x^2+bx+c}$$

con denominatore di secondo grado si puó esprimere

- come
$$\frac{A}{x\alpha} + \frac{B}{x-\beta}$$
se il denominatore possiede due radici reali e distinte,

- come
$$\frac{1}{(x-\gamma)^2}$$
se il denominatore possiede una sola radice reale,
- come
$$\frac{1}{\omega^2+(x-\delta)^2}$$
se il denominatore non possiede radici reali.

In tutti e tre i casi sono disponibili primitive elementari e quindi l'integrale
$$\int_u^v \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx$$
fatta salva la condizione che la funzione razionale sia definita sull'intervallo $[u, v]$, cioé in esso il denominatore non si annulli mai, é perfettamente calcolabile.
Il risultato si esprime:

- con logaritmi, se il denominatore ha due radici reali,
- con una funzione ancora razionale se il denominatore ha una sola radice,
- con arcotangenti se il denominatore non ha radici reali.

Esempio 28.5. *Assegnata la funzione razionale*
$$f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}$$
tenuto conto che $x^2-5x+6 = (x-3)(x-2)$ *si possono cercare* A *e* B *tali che*
$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$
cosa che si realizza se
$$A(x-3)+B(x-2) = (A+B)x-3A-2B = 1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} A+B=0 \\ 3A+2B=-1 \end{cases}$$
quindi
$$f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$$
Riesce pertanto, ad esempio,
$$\int_0^1 \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x-3}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x-2}\,dx =$$
$$= \log(|x-3|)|_0^1 - \log(|x-2|)|_0^1 = 2\log(2) - \log(3) = \log\left(\frac{4}{3}\right)$$

Esempio 28.6. *Assegnata la funzione razionale*

$$f(x) = \frac{10}{x^2 + 3x + 10}$$

e osservato che

$$x^2 + 3x + 10 = x^2 + 2\frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 10 = (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{31}{4}$$

si ha

$$\frac{10}{x^2 + 3x + 10} = \frac{10}{(x + \frac{3}{2})^2 + \frac{31}{4}} = \frac{40}{31} \frac{1}{1 + \left(\frac{2x+3}{\sqrt{31}}\right)^2}$$

Da cui, ad esempio,

$$\int_0^1 \frac{10}{x^2 + 3x + 10}\, dx = \frac{40}{31} \int_0^1 \frac{1}{1 + \left(\frac{2x+3}{\sqrt{31}}\right)^2}\, dx =$$

$$= \frac{20}{\sqrt{31}} \int_0^1 \frac{1}{1 + \left(\frac{2x+3}{\sqrt{31}}\right)^2} \frac{2}{\sqrt{31}} dx = \frac{20}{\sqrt{31}} \arctan\left(\frac{2x+3}{\sqrt{31}}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{20}{\sqrt{31}} \left\{ \arctan\left(\frac{5}{\sqrt{31}}\right) - \arctan\left(\frac{3}{\sqrt{31}}\right) \right\}$$