ANALISI

Argomenti della Lezione

11 gennaio 2012

29. Numeri complessi

29.1. L'insieme $\mathcal{C}$. L'insieme $\mathcal{C}$ dei numeri complessi é l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali

$$\mathcal{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

La tradizione vuole che la coppia (a, b), cioé il numero complesso $\{a,\, b\}$ si indichi con la notazione sotto forma di binomio

$$a + i\,b$$

generalmente indicato con la lettera z:

- il simbolo i si dice `unitá immaginaria`,
- il numero a si dice $\mathrm{Re}\,(z)$, parte reale di z,
- il numero b si dice $\mathrm{Im}(z)$, parte immaginaria di z,
- il sottoinsiemi di $\mathcal{C}$ formato dalle coppie $(a, 0)$ corrisponde all'insieme dei numeri reali,
- il sottoinsiemi di $\mathcal{C}$ formato dalle coppie $(0, b)$ si dice insieme dei numeri `immaginari puri`.

29.2. Somme e differenze. L'insieme $\mathcal{C}$ ha una ovvia naturale struttura di spazio vettoriale sui reali

$$\lambda(a + ib) + \mu(c + id) = (\lambda a + \mu c) + i(\lambda b + \mu d)$$

29.3. I prodotti. Il prodotto $(a + ib)\,(c + id)$ é definito come il normale prodotto di due binomi

$$(a + ib)\,(c + id) = ac + iad + ibc + bdi^2$$

al quale si aggiunge l'assunzione - per definizione - che $i^2 = -1$ e pertanto

$$(a + ib)\,(c + id) = (ac - bd) \;+\; i(ad + bc)$$

Osservazione 29.1. *Si noti che l'assunzione $i^2 = -1$ non significa affatto che i sia un mitico numero il cui quadrato vale -1: la scrittura*

$$i^2 = -1$$

deve essere intesa nel senso seguente

$$(0 + i)(0 + i) = -1 + 0i$$

nella quale sia a primo membro che a secondo membro ci sono numeri complessi e non numeri reali.

29.4. La divisione. La divisione per un reale é ovvia

$$\frac{a+ib}{2} = \frac{a}{2} + i\,\frac{b}{2}$$

Nel caso in cui il divisore sia un `vero` complesso

$$\frac{a+ib}{c+id}$$

si osserva che, qualunque sia $w \neq 0$

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)w}{(c+id)w}$$

e che, scegliendo

$$w = c - id$$

si ha

$$(c+id)(c-id) = c^2 + d^2$$

e pertanto

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}$$

da cui

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

Esempio 29.2. *Il quoziente*

$$\frac{1+i}{3-4i}$$

si calcola con

$$\frac{(1+i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{1}{25}\,(-1+7i)$$

29.5. Le rappresentazioni cartesiana e polare. I numeri complessi, coppie ordinate di numeri reali si rappresentano come punti del piano cartesiano:

- i complessi $z = a + 0i$, i reali, si rappresentano (come giá si rappresentavano) sull'asse x,
- gli immaginari puri $z = 0 + ib$ si rappresentano sull'asse y,
- tutti gli altri si rappresentano.... nel piano.

La somma di due numeri complessi $z = a+ib$ e $w = c+id$ si determina con lo stesso algoritmo del parallelogramma con cui si sommavano i vettori nel piano.

Indicato con
$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
il modulo di $z = a + ib$ e con $\arg(z) = \vartheta$ l'angolo tra il vettore dall'origine al punto z e il semiasse positivo delle x si ha la rappresentazione polare
$$z = a + ib \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = \rho\, \cos(\vartheta) \\ b = \rho\, \sin(\vartheta) \end{cases}$$
L'argomento di un numero complesso, come qualsiasi misura angolare, é definito a meno di multipli di 2π: pertanto a z corrispondono non solo ϑ ma anche $\vartheta + 2\pi,\ \vartheta - 2\pi,\ \vartheta + 4\pi$, *ecc.*

29.6. Potenze e radici. La rappresentazione polare é particolarmente adatta a riconoscere prodotti e quozienti di numeri complessi:

$$\begin{cases} |z| = \rho, \quad \arg(z) = \vartheta \\ |w| = \sigma, \quad \arg(w) = \psi \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} |z.w| = \rho.\sigma, \quad \arg(z.w) = \vartheta + \psi \\ |z/w| = \rho/\sigma, \quad \arg(z/w) = \vartheta - \psi \end{cases}$$
Sia $z = a + ib$ e siano ρ e ϑ il suo modulo e un suo argomento: riesce
$$z^n = \rho\left(\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)\right)^n = \rho^n \left(\cos(n\vartheta) + i \sin(n\,\vartheta)\right)$$
Le radici $n-$esime di z sono, per definizione, i numeri complessi w tali che
$$w^n = z$$
Pertanto detti σ e ψ gli incogniti `modulo` e `argomento` di w, dovrá essere
$$\sigma^n = \rho, \quad n\psi = \vartheta + 2k\pi$$
Condizioni che implicano
$$\sigma = \sqrt[n]{\rho}, \quad \psi = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n}$$
Il modulo σ é quindi la radice $n-$esima positiva del numero reale positivo ρ.
Di argomenti ψ, apparentemente infiniti tenendo conto delle infinite scelte di k sono invece solo gli n seguenti
$$\frac{\vartheta}{n}, \quad \frac{\vartheta}{n} + \frac{2\pi}{n}, \quad \frac{\vartheta}{n} + 2\frac{2\pi}{n}, \quad \dots \frac{\vartheta}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n}$$
I loro argomenti differiscono ciascuno dal precedente per $2\pi/n$.

Le n radici $n-$esime di z:

- hanno tutte ed n lo stesso modulo, quindi stanno tutte sulla stessa circonferenza di centro l'origine, e raggio $\sqrt[n]{\rho}$,
- una di esse ha come argomento ϑ/n,
- tutte insieme costituiscono i vertici dl un poligono regolare di n lati.

$\boxed{\text{Riassunto}}$

Dato $z \in \mathcal{C}$ e dato $n \in \mathbb{N}$

- esiste un $z^n \in \mathcal{C}$,
- esistono n radici, cioé $w \in \mathcal{C}$ tali che $w^n = z$,
- le n radici sono tutte distinte se $z \neq 0$

Esempio 29.3. *Sia $z = 1$ ed $n = 4$: le radici quarte di 1 sono pertanto:*

- *4 numeri complessi appartenenti alla circonferenza di raggio $\sqrt[4]{1} = 1$*
- *tenuto conto che $\arg(1) = 0$ una di tali radici é $w = 1$*
- *le altre tre devono completare i vertici di un quadrato inscritto nella circonferenza e con un vertice in $w = 1$*

É facile riconoscere che le radici quarte sono

$$1, \quad i, \quad -1, \quad -i$$

che determinano appunto tale quadrato.

29.7. Esponenziale complesso.

Se $z = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha), \quad w = \cos(\beta) + i\sin(\beta)$ allora

$$\cos(\alpha)\,\cos(\beta) - \sin(\beta)\,\sin(\alpha) + i\,(\sin(\alpha)\,\cos(\beta) + \sin(\beta)\,\cos(\alpha)) =$$

$$= \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)$$

Riesce cioé

$$(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))\,(\cos(\beta) + i\sin(\beta)) = \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)$$

ovvero l'espressione in t

$$f(t) = \cos(t) + i\sin(t)$$

soddisfa la proprietá formale dell'esponenziale $f(t_1 + f_2) = f(t_1)\,f(t_2)$.

Si pone pertanto (e non solo per tale motivo)

$$\cos(\alpha) + i\sin(\alpha) = e^{i\alpha}$$

Di conseguenza di tale notazione l'espressione polare di un numero z assume la comoda espressione

$$z = |z|e^{i\,\arg(z)}$$

Esempio 29.4. *Pertanto se* $z = 1 + i$, *tenuto conto che* $|z| = \sqrt{2}$ *e* $\arg(z) = \pi/4 + 2k\pi$ *si ha*

$$1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$$

Definizione 29.5. *Per ogni* $z = a + ib$ *si definisce*

$$e^z = e^a\, e^{ib} = e^a\,(\cos(b) + i\sin(b))$$

La funzione e^z appena definita é la prima funzione che incontriamo da $\mathcal{C}$ in $\mathcal{C}$: indichiamo due proprietá importanti

- $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$
- $e^z = e^{z+2\pi i}$, cioé si tratta di una funzione periodica di periodo $2\pi i$.

Proposizione 29.6. *Sia* $z = \rho e^{i\varphi}$ *riesce*

$$z^n = \rho^n e^{in\varphi}$$

$$\{z^{\frac{1}{n}}\} = \left\{ \sqrt[n]{\rho}e^{i\varphi/n},\ \sqrt[n]{\rho}e^{i\varphi/n}\, e^{i\frac{2\pi}{n}},\ \dots\ \sqrt[n]{\rho}e^{i\varphi/n}\, e^{i(n-1)\frac{2\pi}{n}} \right\}$$

29.8. La formula di Eulero. L'espressione accolta sopra

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$$

consente, abbinandola con la analoga scritta per $-\alpha$

$$e^{-i\alpha} = \cos(\alpha) - i\sin(\alpha)$$

di ricavare, per somma e sottrazione le espressioni

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \quad \sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

Tali formule, dette di Eulero, traducono le funzioni goniometriche nelle notazioni tipografiche dell'esponenziale complesso, traduzione notevolmente utile.

Esempio 29.7. *Proviamo a servirci delle formule di Eulero ad esempio per calcolare* $\cos(3\alpha)$*:*

$$\cos(3\alpha) = \frac{e^{3i\alpha} + e^{-3i\alpha}}{2}$$

Tenuto conto che

$$e^{3i\alpha} = \left(e^{i\alpha}\right)^3 = (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^3$$
$$e^{-3i\alpha} = \left(e^{-i\alpha}\right)^3 = (\cos(\alpha) - i\sin(\alpha))^3$$

si ha

$$e^{3i\alpha} = \cos^3(\alpha) + 3i\cos^2(\alpha)\sin(\alpha) - 3\cos(\alpha)\sin^2(\alpha) - i\sin^3(\alpha)$$
$$e^{-3i\alpha} = \cos^3(\alpha) - 3i\cos^2(\alpha)\sin(\alpha) - 3\cos(\alpha)\sin^2(\alpha) + i\sin^3(\alpha)$$

da cui, sommando,

$$e^{3i\alpha} + e^{3i\alpha}e^{-3i\alpha} = 2\cos^3(\alpha) - 6\cos(\alpha)\sin^2(\alpha)$$

da cui

$$\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)\sin^2(\alpha)$$

29.9. Le equazioni di secondo grado. Le equazioni di secondo grado sono il primo problema che utilizza i numeri complessi: la formula risolutiva dell'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

contiene la richiesta di radici quadrate, richiesta che, nell'ambito reale viene rifiutata se $b^2 - 4ac < 0$.

Nell'ambito complesso tale rifiuto non ha piú motivo: naturalmente le radici quadrate che si producono saranno due numeri complessi coniugati.