ANALISI

Argomenti della Lezione

12 gennaio 2012

30. Equazioni differenziali lineari ordine 1

Un'equazione differenziale é un'equazione che coinvolge una funzione e le sue derivate: l'incognita dell'equazione differenziale é appunto tale funzione.

- **Primo esempio:**

$$y'(x) = f(x)$$

essendo $f(x)$ una funzione assegnata e $y(x)$ la funzione incognita da determinare.

Le soluzioni sono.... tutte le primitive di $f(x)$.

- **Secondo esempio:**

$$y'(x) + y(x) = f(x)$$

L'equazione equivale a quest'altra

$$e^x y'(x) + e^x y(x) = e^x f(x)$$

nella quale si riconosce

$$(e^x y(x))' = e^x f(x)$$

Le soluzioni $e^x y(x)$ sono le primitive di $e^x f(x)$

- **Terzo esempio:**
....espressioni piú complicate raramente permettono di determinare esplicitamente le soluzioni !

La lezione di oggi é dedicata alle equazioni differenziali della forma

$$\boxed{y'(x) + ay(x) = f(x)}$$

che si dicono

- equazioni differenziali lineari del primo ordine,
- a coefficienti costanti,
- non omogenee.

30.1. Applicazioni che conducono a equazioni differenziali.

Rendita dei capitali

Un capitale C_0 sia depositato in banca all'interesse τ annuo: dopo un anno il capitale ammonterá a

$$C_1 = C_0 + \tau\, C_0$$

dopo solo metá anno il capitale sará $C_{\frac{1}{2}} = C_0 + \frac{1}{2}\tau C_0$ e, in generale dopo una frazione h di anno il capitale ammoterá a

$$C_h = C_0 + \tau h C_0$$

ovvero, in generale

$$\frac{C_h - C_0}{h} = \tau C_0$$

Detto $C(t)$ il capitale maturato al tempo t si intravede la relazione

$$\frac{C(t+h) - C(t)}{h} = \tau C(t)$$

ovvero $C(t)$ soddisfa l'equazione differenziale

$$C'(t) = \tau C(t)$$

Le soluzioni $C(t)$ sono pertanto

$$C(t) = k e^{\tau t}$$

Se il deposito al tempo $t = 0$ era C_0 allora l'ammontare $C(t)$ nei tempi successivi sará

$$C(t) = C_0 e^{\tau t}$$

Legge di caduta dei gravi

Indichiamo con $v(t)$ la velocitá di caduta di un grave che, per semplicitá immaginiamo di massa $m = 1$.
Il secondo principio della dinamica $ma = f$ implica quindi

$$v'(t) = f(t)$$

essendo $f(t)$ la forza applicata.
Nel caso della caduta di un grave la forza applicata é il peso mg e l'attrito $-\gamma v(t)$.

La velocitá $v(t)$ verifica l'equazione differenziale

$$v'(t) = g - \gamma v(t)$$

che puó essere riscritta come

$$v'(t) + \gamma v(t) = g \quad \to \quad e^{\gamma t} v'(t) + \gamma e^{\gamma t} v(t) = e^{\gamma t} g$$

ovvero ancora

$$\left(e^{\gamma t} v(t)\right)' = e^{\gamma t} g \quad \to \quad e^{\gamma t} v(t) = \frac{1}{\gamma} g e^{\gamma t} + c$$

da cui segue

$$v(t) = e^{-\gamma t} \left\{ \frac{1}{\gamma} g e^{\gamma t} + c \right\} = \frac{g}{\gamma} + c e^{-\gamma t}$$

Da cui si riconosce la (inattesa ma osservabile) proprietá per la quale i gravi in presenza di attrito, $\gamma > 0$, cadono a velocitá costante e non hanno quindi il moto uniformemente accelerato loro ingenuamente attribuito.

Raffreddamento di un corpo

Indichiamo con $T(t)$ la temperatura di un oggetto posto in un ambiente a temperatura A: la variazione di temperatura al passare del tempo segue la legge

$$T'(t) = -\gamma(T(t) - A)$$

di proporzionalitá della velocitá di variazione rispetto al divario tra temperatura dell'oggetto e temperatura ambiente.
L'equazione differenziale si scrive anche come

$$T'(t) + \gamma T(t) = \gamma A$$

ovvero, moltiplicando membro a membro per $e^{\gamma t}$,

$$\left(e^{\gamma t} T(t)\right)' = \gamma A e^{\gamma t} \quad \to \quad e^{\gamma t} T(t) = A e^{\gamma t} + c$$

da cui

$$T(t) = A + c e^{-\gamma t}$$

Dinamica di popolazioni

La variazione annua di una popolazione $N(t)$ dipende da

- tasso n (cioé percentuale annuale) di nascite,
- tasso m (cioé percentuale annuale) di morti,
- flusso migratorio annuale b.

In una frazione h di anno si avrá quindi

$$N(t+h)-N(t)=(n-m)\,h\,N(t)+b\,h \quad \rightarrow \quad N'(t)=aN(t)+b \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \left(e^{-at}N(t)\right)'=be^{-at}$$

avendo indicato con $a=n-m$
Le soluzioni $N(t)$ sono pertanto

$$N(t)=\frac{b}{a}+ke^{at}$$

30.2. Algoritmo risolutivo. $\boxed{y'+\gamma y=0}$

Tenuto conto che

$$y'+\gamma y=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(e^{\gamma t}y(t)\right)'=0$$

si riconosce che le soluzioni dell'equazioni sono tutte e sole le funzioni

$$y(t)=ke^{-\gamma t}$$

All'equazione $y'+\gamma y=0$ si aggiunge spesso una `condizione iniziale`, si considera cioé il problema

$$\begin{cases} y'+\gamma y=0 \\ y(t_0)=y_0 \end{cases}$$

che si dice *problema di Cauchy*.
La soluzione del *problema di Cauchy* si ricava dalla precedente famiglia di soluzioni $y(t)=ke^{-\gamma t}$ ed é quindi

$$y(t)=y_0e^{-\gamma(t-t_0)}$$

É importante notare che se $\gamma>0$ le soluzioni del *problema di Cauchy* hanno tutte, cioé indipendentemente dalla condizione iniziale, limite nullo per $t\to+\infty$.

$\boxed{y'+\gamma y=f(t)}$

Il *problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'+\gamma y=f(t) \\ y(t_0)=y_0 \end{cases}$$

si traduce, analogamente al caso precedente, in

$$e^{\gamma t}y'+\gamma e^{\gamma t}y=e^{\gamma t}f(t) \quad \rightarrow \quad \left(e^{\gamma t}y(t)\right)'=e^{\gamma t}f(t)$$

da cui integrando membro a membro su $[t_0, t]$ si ottiene

$$\int_{t_0}^{t} \left(e^{\gamma s} y(s)\right)' ds = \int_{t_0}^{t} e^{\gamma s} f(s) ds$$

e quindi

$$e^{\gamma t} y(t) - e^{\gamma t_0} y(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{\gamma s} f(s) ds$$

ovvero

$$y(t) = e^{-\gamma t} \left\{ e^{\gamma t_0} y(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\gamma s} f(s) ds \right\}$$

Osservazione 30.1. *Tenuto conto che tutte le funzioni*

$$k e^{-\gamma t}$$

sono soluzioni dell'equazione $y' + \gamma y = 0$ *si riconosce che le soluzioni dell'equazione non omogenea sono somme*

- *delle soluzioni dell'equazione omogenea,*
- *di una soluzione dell'equazione non omogenea.*

La soluzione dell'equazione non omogenea puó essere determinata in tanti modi: quello indicato

$$e^{-\gamma t} \int_{t_0}^{t} e^{\gamma s} f(s) ds$$

é l'algoritmo generale.
In corrispondenza a varie $f(t)$ *tale soluzione dell'equazione non omogenea puó essere determinata anche con metodi empirici molto rapidi.*

- *se* $f(t) = b$ *costante allora una soluzione dell'equazione*

  $$y' + \gamma y = b$$

  é direttamente la costante

  $$\overline{y}(t) = \frac{b}{\gamma}$$

- *se* $f(t) = Ae^{\beta t}$, $\beta \neq -\gamma$ *é un esponenziale allora la soluzione della non omogenea puó essere cercata nella forma* $\overline{y}(t) = Be^{\beta t}$
- *se* $f(t) = Ae^{-\gamma t}$ *allora la soluzione della non omogenea puó essere cercata nella forma* $\overline{y}(t) = Bt\, e^{-\gamma t}$
- *se* $f(t)$ *é un polinomio in* t *allora la soluzione della non omogenea puó essere cercata nella forma di polinomio anch'essa.*

30.3. Il teorema di unicitá.

Teorema 30.2. *Sia $f(t)$ continua in $[a, b]$ allora il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' + \gamma y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione di classe C^1 in $[a, b]$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo giá indicato una soluzione con l'espressione

$$y(t) = e^{-\gamma t} \left\{ e^{\gamma t_0} y(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\gamma s} f(s) ds \right\}$$

Per completare il teorema occorre riconoscere che essa é unica.
Siano per assurdo $y_1(t)$ e $y_2(t)$ due soluzioni di tale problema, allora la differenza

$$y(t) = y_1(t) - y_2(t)$$

soddisfa il problema di Cauchy seguente

$$\begin{cases} y' + \gamma y = 0 \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$$

Ma allora, dal teorema di Lagrange in $[a, b]$

$$\left(e^{\gamma t} y(t)\right)' = 0 \quad \to \quad e^{\gamma t} y(t) = e^{\gamma t_0} y(t_0) = 0$$

da cui

$$y(t) \equiv 0 \quad \to \quad y_1(t) \equiv y_2(t)$$

$\square$

Corollario 30.3. *Le soluzioni dell'equazione $y' + \gamma y = 0$ hanno segno costante o sono identicamente nulle.*

30.4. Generalizzazione. Con tecniche assolutamente analoghe si possono determinare le soluzioni dell'equazione

$$y'(t) + \gamma(t) y(t) = f(t)$$

che differisce dalla precedente avendo accolto che il coefficiente γ che prima era una costante possa essere invece una funzione $\gamma(t)$ che naturalmente supponiamo continua in $[a, b]$ come $f(t)$.

Invece di ricorrere a moltiplicare membro a membro per l'esponenziale $e^{\gamma t}$ si dovrá

- determinare una primitiva $\Gamma(t)$ di $\gamma(t)$,
- moltiplicare membro a membro per l'esponenziale $e^{\Gamma(t)}$,

- pervenendo cosí all'equazione equivalente

$$\left(e^{\Gamma(t)}y(t)\right)' = e^{\Gamma(t)}f(t)$$

da cui, integrando si perviene a

$$e^{\Gamma(t)}y(t) - e^{\Gamma(t_0)}y(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{\Gamma(s)}f(s)ds$$

30.5. Problema. Sia $f(t)$ continua in $\mathbb{R}$: sotto quali condizioni la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \gamma y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

é limitata in $\mathbb{R}$?

sotto quali condizioni é periodica ?