ANALISI

Argomenti della Lezione

13 gennaio 2012

31. Equazioni differenziali lineari ordine 2

Le equazioni

$$y'' + ay' + by = f(t) \tag{1}$$

si chiamano

- equazioni differenziali lineari di secondo ordine,
- a coefficienti costanti,
- non omogenee.

Il *problema di Cauchy* ad esse associato é il seguente

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(t) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases}$$

Esse traggono motivazione, oltre che da interessi teorici, dal secondo principio della dinamica

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{f}$$

che lega l'accelerazione $\overrightarrow{a}$ con cui si muove un punto di massa m alla forza $\overrightarrow{f}$ ad esso applicata: `accelerazione` vuol dire derivata seconda, e quindi *equazioni differenziali di secondo ordine*.
Il moto del punto dipende naturalmente oltre che dalla forza applicata dalle condizioni iniziali a partire dalle quali esso é lasciato:

- posizione iniziale,
- velocitá iniziale.

Il *problema di Cauchy* associato a equazioni del secondo ordine é il seguente

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(t) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases}$$

I dati iniziali rappresentano naturalmente la posizione iniziale e la velocitá iniziale.

Il problema fondamentale che suffraga l'interesse delle equazioni del tipo (1) é quello dell'oscillatore armonico: il movimento di un punto di massa m che si muove lungo l'asse x, soggetto

- al richiamo elastico verso l'origine $-kx$
- e all'attrito $-rx'$.

Il secondo principio della dinamica offre in tal caso la seguente equazione

$$(2) \qquad mx''(t) = -kx(t) - rx'(t) \quad \to \quad mx'' + rx' + kx = 0$$

31.1. Determinazione di soluzioni.

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} mx'' + rx' + kx = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = x_1 \end{cases}$$

Si possono cercare, in modo empirico, soluzioni della (2) tra gli esponenziali $e^{\lambda t}$: sostituendo si ottiene

$$e^{\lambda t} \left\{ m\lambda^2 + r\lambda + k \right\} = 0$$

che suggerisce gli esponenti λ adatti, le radici dell'equazione

$$m\lambda^2 + r\lambda + k = 0$$

Come tutte le equazioni di secondo grado si possono presentare tre situazioni diverse:

- esistenza di due soluzioni reali distinte, $r^2 - 4km > 0$,
- esistenza di una sola soluzione reale, $r^2 - 4km = 0$,
- esistenza di due soluzioni complesse coniugate, $r^2 - 4km < 0$.

PRIMO CASO

Il primo caso, $r^2 - 4km > 0$, offre due funzioni soluzioni $e^{\lambda_1 t}$, $e^{\lambda_2 t}$ e quindi é disponibile la famiglia di soluzioni

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

contenente due coefficienti liberi.
É pertanto possibile trovare nella famiglia di soluzioni la $x(t)$ che soddisfi le due condizioni iniziali assegnate

$$\begin{cases} x(0) = x_0 & c_1 + c_2 = x_0 \\ x'(0) = x_1 & \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = x_1 \end{cases}$$

SECONDO CASO

Il secondo caso, $r^2 - 4km = 0$, offre una sola funzione soluzione $e^{\lambda_1 t}$: si puó provare che tuttavia in questo caso é soluzione dell'equazione anche la funzione $t\, e^{\lambda_1 t}$.
Quindi é disponibile la famiglia di soluzioni

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t\, e^{\lambda_1 t}$$

contenente due coefficienti liberi.
É pertanto possibile trovare nella famiglia di soluzioni la $x(t)$ che soddisfi le due condizioni iniziali assegnate.

$\boxed{\text{Terzo caso}}$

Il terzo caso, $r^2 - 4km < 0$, offre due radici complesse coniugate

$$\lambda_1 = \frac{-r + i\sqrt{4km - r^2}}{2m}, \qquad \lambda_2 = \frac{-r - i\sqrt{4km - r^2}}{2m}$$

L'espressione formale dell'esponenziale complesso

$$e^{a+ib} = e^a \left\{\cos(b) + i\sin(b)\right\}$$

suggerisce, indicato con

$$\omega = \frac{\sqrt{4km - r^2}}{2m}$$

le due espressioni, complesse,

$$x_1(t) = e^{-\frac{r}{2m}t}\left\{\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right\}, \quad x_2(t) = e^{-\frac{r}{2m}t}\left\{\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)\right\}$$

che soddisfano l'equazione differenziale $mx'' + rx' + kx = 0$.
La funzione complessa

$$x_1(t) = e^{-\frac{r}{2m}t}\cos(\omega t) \; + \; i\,e^{-\frac{r}{2m}t}\sin(\omega t)$$

soddisfa l'equazione differenziale in quanto la soddisfano sia la parte reale che la parte immaginaria: quindi le due funzioni

$$e^{-\frac{r}{2m}t}\cos(\omega t), \qquad e^{-\frac{r}{2m}t}\sin(\omega t)$$

soddisfano l'equazione
Quindi é disponibile, anche in questo caso, una famiglia di soluzioni

$$x(t) = e^{-\frac{r}{2m}t}\left\{c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t)\right\}$$

contenente due coefficienti liberi.
É pertanto possibile trovare nella famiglia di soluzioni la $x(t)$ che soddisfi le due condizioni iniziali assegnate.