ANALISI

Argomenti della Lezione

18 gennaio 2012

32. Il teorema di unicitá

Teorema 32.1. *Il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} mx'' + rx' + kx = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = x_1 \end{cases}$$

ha, per m, r, k tutti e tre non negativi, una e una sola soluzione.

Dimostrazione. Che ne abbia una é stato riconosciuto precedentemente riconoscendo la possibilitá di trovare nelle famiglie con due parametri liberi delle soluzioni dell'equazione nei vari casi la possibilitá di scegliere i coefficienti $c_1,\ c_2$ in modo da soddisfare le condizioni iniziali.

Resta da provare l'unicitá: siano per assurdo $x_1(t)$ e $x_2(t)$ due soluzioni diverse dello stesso problema di Cauchy: allora la loro differenza

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

soddisfa il problema di Cauchy

$$\begin{cases} mx'' + rx' + kx = 0 \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Moltiplicando l'equazione membro a membro per $2x'(t)$ si ottiene

$$2mx''\,x' + 2rx'^2 + 2kxx' = 0$$

ovvero

$$m\,\frac{d}{dt}(x')^2 + k\,\frac{d}{dt}x^2 + 2r(x')^2 = 0$$

Integrando sull'intervallo $[0, t]$ si ottiene

$$m\,(x')^2(t) + k\,x^2(t) + 2r\int_0^t (x')^2(s)ds = 0$$

La somma di tre addendi non negativi, qui usiamo la condizione, fisicamente del tutto naturale, che i tre coefficienti m, r, k siano non negativi, puó venire nulla solo se i tre addendi sono tutti e tre nulli !

Quindi sará, in particolare

$$\forall t > 0: \quad x^2(t) = 0 \quad \to \quad x(t) \equiv 0$$

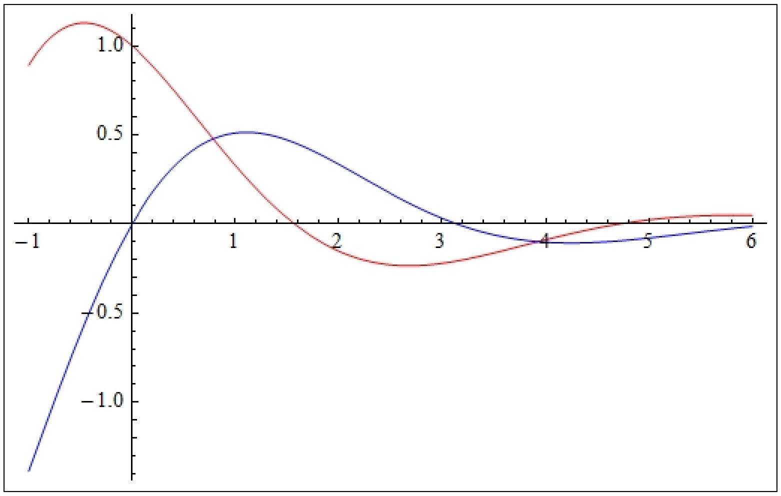

FIGURA 1. $e^{-t/2}\cos(t)$ e $e^{-t/2}\sin(t)$

Lo stesso conto si puó fare, pensando a $t < 0$ integrando ancora sull'intervallo $[0, t]$. $\square$

Osservazione 32.2. *Il fatto che il problema di Cauchy per il secondo ordine abbia anch'esso il teorema di unicitá permette di riconoscere che i grafici delle tante funzioni della famiglia delle soluzioni di una stessa equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti omogenea sono abbastanza diversi fra loro:*
se i grafici di due funzioni $x_1(t)$ e $x_2(t)$ distinte della stessa famiglia

si incrociano in un punto allora in tale punto
devono avere tangenti differenti

In figura 1 sono disegnati i grafici di due soluzioni dell'equazione

$$4x'' + 4x' + 5x = 0$$

Si noti come, dove si incrociano, non sono tangenti.
Se infatti riuscisse

$$x_1(t_0) = x_2(t_0), \qquad x_1'(t_0) = x_2'(t_0)$$

allora la funzione differenza soddisferebbe il problema di Cauchy

$$\begin{cases} mx'' + rx' + kx = 0 \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

e quindi, in base alla dimostrazione di unicitá precedente dovrebbe essere identicamente nulla, e quindi le due funzioni $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sarebbero la stessa funzione.

32.1. Equazioni non omogenee. Le equazioni

$$mx'' + rx' + kx = f(t)$$

si dicono

- equazioni lineari di secondo ordine,
- a coefficienti costanti,
- non omogenee.

Un esempio di problema fisico che suggerisca un'equazione non omogenea é rappresentato da una massa appesa verticalmente ad una molla: indicato con x l'asse verticale orientato verso il basso, sul punto di massa m agiscono tre forze

- il richiamo elastico $-kx$,
- l'attrito $-rx'$
- il peso mg.

L'equazione, non omogenea per via del peso, che ne deriva é quindi

$$mx'' + rx' + kx = mg$$

Le soluzioni $x(t)$ delle equazioni lineari non omogenee del secondo ordine sono costituite, come nel caso del primo ordine, dalla somma

- di una soluzione particolare $\overline{x}(t)$ dell'equazione non omogenea,
- di tutte le soluzioni $x_0(t)$ dell'equazione omogenea associata.

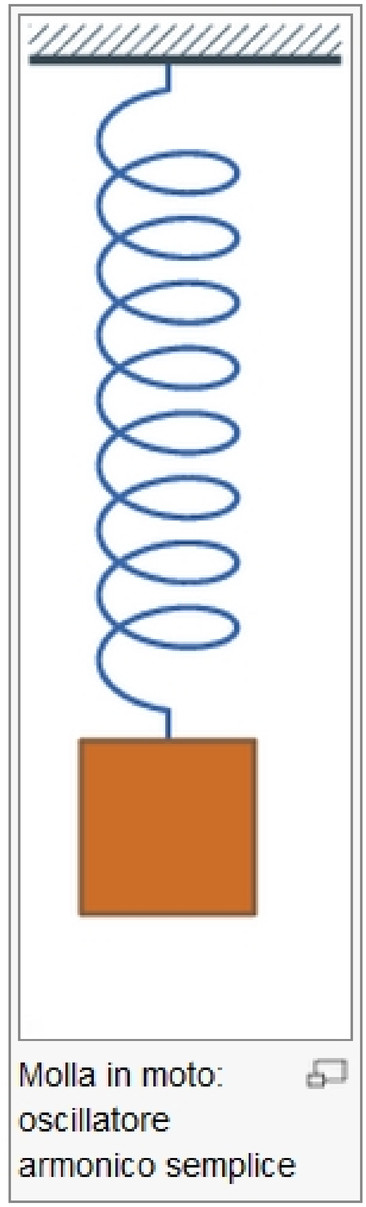

Figura 2.

Esempio 32.3. *Consideriamo l'equazione non omogenea*

$$x'' + x = 1$$

Una soluzione dell'equazione non omogenea é evidentemente la soluzione costante $\overline{x}(t) \equiv 1$, *le soluzioni della omogenea associata sono*

$$x_0(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$$

Tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea associata sono pertanto

$$x(t) = 1 + c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$$

Osservazione 32.4. *L'affermazione nel precedente Esempio che la famiglia* $\mathfrak{F}$ *costituita dalle*

$$x(t) = 1 + c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t), \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

costituisce

tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea

é basata su due fatti

- *la presenza delle due costanti libere* c_1 *e* c_2 *consente di trovare in tale famiglia* $\mathfrak{F}$ *soluzione a qualunque problema di Cauchy si voglia abbinare all'equazione differenziale,*
- *ogni funzione* $y(t)$ *che soddisfi l'equazione differenziale avrá due valori iniziali*

  $$y(0) = A, \quad y'(0) = B$$

  e, come osservato sopra, esisterá nella famiglia $\mathfrak{F}$ *indicata una funzione* $x_{AB}(t)$ *che soddisfi quelle stesse condizioni iniziali,*
- *la differenza* $y(t) - x_{AB}(t)$ *verifica il problema di Cauchy*

  $$\begin{cases} x'' + x = 0 \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

  che, come é stato riconosciuto precedentemente ha la sola soluzione nulla...
  quindi

  $$y(t) = x_{AB}(t)$$

  ovvero $y(t)$ *appartiene alla famiglia* $\mathfrak{F}$, *che, quindi esaurisce tutte le soluzioni.*

32.2. Il metodo di somiglianza. La determinazione di una soluzione particolare $\overline{x}(t)$ dell'equazione non omogenea non é in generale operazione semplice: lo diventa solo in corrispondenza a termini noti $f(t)$ particolari

- costanti,
- polinomi,
- esponenziali,
- polinomi goniometrici,
- ....pochi altri !

Il titolo *metodo di somiglianza* si riferisce alla determinazione di soluzioni particolari $x(t)$ scelte

somiglianti alla $f(t)$ assegnata

- $f(t)$ costante $\to$ $\overline{x}(t)$ costante,
- $f(t)$ polinomio $\to$ $\overline{x}(t)$ polinomio,
- $f(t)$ esponenziale $\to$ $\overline{x}(t)$ esponenziale,
- $f(t)$ polinomio goniometrico $\to$ $\overline{x}(t)$ polinomio goniometrico.

Esempio 32.5.

$$x'' + x' + x = 1 + t^2$$

La linearitá suggerisce di considerare, separatamente le due equazioni

$$x'' + x' + x = 1, \quad x'' + x' + x = t^2$$

Una soluzione particolare per la prima é ovviamente $\overline{x}_1(t) \equiv 1$.
Una soluzione per la seconda puó essere cercata nella forma di polinomio $At^2 + Bt + C$, che, sostituendo obbliga a porre

$$A = 1, \quad B = -2, \quad C = 0 \quad \to \quad \overline{x}_2(t) = t^2 - 2t$$

Tenuto conto che le soluzioni dell'omogenea sono

$$x_0(t) = e^{-t/2}\left\{c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right\}$$

Le soluzioni dell'equazione non omogenea assegnata,

$$x(t) = \overline{x}_1(t) + \overline{x}_2(t) + x_0(t)$$

sono

$$x(t) = 1 + t^2 - 2t + e^{-t/2}\left\{c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right\}$$

Esempio 32.6. *Sia assegnata l'equazione*

$$x'' + 4x' + 13x = 5\,e^t$$

Si puó cercare una soluzione $\overline{x}(t)$ della non omogenea nella forma, per somiglianza, di Ae^t: sostituendo si ottiene

$$e^t\,\{A + 4A + 13A\} = 5e^t \quad \to \quad 18A = 5 \quad \to \quad \overline{x}(t) = \frac{5}{18}e^t$$

Tenuto conto che

$$x_0(t) = e^{-2t}\,\{c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t)\}$$

si ottiene

$$x(t) = \frac{5}{18}e^t + e^{-2t}\,\{c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t)\}$$

Esempio 32.7. *Sia assegnata l'equazione*

$$x'' + 4x' + 13x = \sin(t) + \cos(2t)$$

Si puó cercare una soluzione $\overline{x}(t)$ della non omogenea determinando, separatamente soluzioni delle due equazioni non omogenee

$$x'' + 4x' + 13x = \sin(t), \qquad x'' + 4x' + 13x = \cos(2t)$$

Per la prima cerchiamo

$$\overline{x}_1(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$$

Sostituendo si ottiene

$$\begin{cases} 4B + 12A & = 0 \\ -4A + 12B & = 1 \end{cases} \quad \to \quad A = -\frac{1}{40},\ B = \frac{3}{40}$$

da cui

$$\overline{x}_1(t) = -\frac{1}{40}\cos(t) + \frac{3}{40}\sin(t)$$

Analogamente una soluzione particolare $\overline{x}_2(t)$ della seconda si cercherá per somiglianza nella forma

$$x_2(t) = C\cos(2t) + D\sin(2t)$$

Sostituendo si ottiene

$$\begin{cases} 9C + 8D & = 1 \\ -8C + 9D & = 0 \end{cases} \quad \to \quad C = \frac{9}{145},\ D = \frac{8}{145}$$

da cui

$$x_2(t) = \frac{9}{145}\cos(2t) + \frac{8}{145}\sin(2t)$$

Tutte le soluzioni dell'equazione completa sono pertanto

$$x(t) = \overline{x}_1(t) + \overline{x}_2(t) + x_0(t)$$

ovvero

$$x(t) = -\frac{1}{40}\cos(t)+\frac{3}{40}\sin(t)+\frac{9}{145}\cos(2t)+\frac{8}{145}\sin(2t)+e^{-2t}\left\{c_1\cos(3t)+c_2\sin(3t)\right\}$$

Osservazione 32.8. *Il metodo di somiglianza, nel caso di esponenziali o funzioni goniometriche si complica nel caso che le funzioni a secondo membro vengano a coincidere con soluzioni dell'omogenea.*
In tal caso le costanti che venivano usate devono essere sostituite con polinomi di primo o secondo grado.

Osservazione 32.9. *Le formule di Eulero traducono, formalmente, le funzioni goniometriche in esponenziali, ad esempio quindi*

$$x''+4x'+13x=\cos(2t) \quad \leftrightarrow \quad x''+4x'+13x=\frac{1}{2}e^{2it}+\frac{1}{2}e^{-2it}$$

Si possono quindi studiare separatamente le due equazioni

$$x''+4x'+13x=\frac{1}{2}e^{2it}, \quad x''+4x'+13x=\frac{1}{2}e^{-2it}$$

cercando soluzioni particolari nella forma standard

$$\overline{x}_1(t)=Ae^{2it}, \quad \overline{x}_2(t)=Be^{2it}e^{-2it}$$

Sostituendo si ottiene

$$\overline{x}_1(t)=\frac{9-8i}{290}\,e^{2it}, \quad \overline{x}_2(t)=\frac{9+8i}{290}\,e^{-2it}$$

Da cui, sommando,

$$\overline{x}_1(t)+\overline{x}_2(t)=\frac{1}{290}\left\{18\cos(2t)+16\sin(2t)\right\}=$$

$$=\frac{1}{145}\left\{9\cos(2t)+8\sin(2t)\right\}$$

32.3. La risonanza. Consideriamo l'equazione

$$mx''+rx'+kx=e^{i\omega t}$$

Una soluzione particolare si cerca, per somiglianza nella forma

$$\overline{x}(t)=Ae^{i\omega t}$$

e sostituendo si ottiene la condizione

$$A\left(-m\,\omega^2+ir\omega+k\right)=1 \quad \to \quad A=\frac{1}{k-m\,\omega^2+ir\omega}$$

da cui

$$|A|=\frac{1}{\sqrt{(k-m\,\omega^2)^2+r^2\omega^2}}$$

É interessante notare per quali valori di ω tale $|A|$ sia piú grande. Posto

$$\phi(\omega) = (k - m\,\omega^2)^2 + r^2\omega^2$$

il quadrato del denominatore, il modulo $|A|$ riesce massimo in corrispondenza ai valori ω^2 rispetto ai quali $\phi(\omega)$ é minimo:

$$\phi'(\omega) = 2\omega\left\{-2m(k - m\,\omega^2)) + r^2\right\}$$

da cui

$$\phi'(\omega_0) = 0 \quad \to \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} - \frac{r^2}{2m^2}$$

da cui

$$\phi(\omega_0) = (k - m\,\omega_0^2)^2 + r^2\omega_0^2 = r^2\left\{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{2m^2}\right\}$$

Il valore piú grande di $|A|$ é pertanto raggiunto in corrispondenza a tale ω_0 e risulta

$$|A(\omega_0)| = \frac{1}{r\sqrt{\dfrac{k}{m} - \dfrac{r^2}{2m^2}}}$$

Tale valore massimo di $|A|$ prende il nome di

ampiezza di risonanza

É evidente come in corrispondenza a coefficienti di attrito $r \approx 0$ l'*ampiezza di risonanza* possa essere molto grande: é a tale fenomeno che si attribuiscono sorprendenti effetti di rottura di strutture elastiche sottoposte a vibrazioni di frequenze ω particolari.

Il fenomeno di risonanza piú comunemente sperimentabile é quello dell'altalena [1]: chi sa ritmare in modo opportuno le spinte da darsi vola, mentre altri che non hanno appreso tale tecnica continuano a fare oscillazioni modestissime.

[1] http://it.wikipedia.org/wiki/Altalena_(oscillante)Periodo_e_risonanza_parametrica

32.4. La fedeltá degli amplificatori. Un amplificatore é uno strumento che trasforma un segnale elettrico in uno acustico, cioé nella vibrazione di una membrana o di un cono.
É ragionevole pensare di schematizzare la vibrazione della membrana, cioé la produzione del suono, con un oscillatore armonico

$$mx'' + rx' + kx = f(t)$$

nel quale $x(t)$ rappresenta lo spostamento della membrana dalla posizione d'equilibrio e $f(t)$ il segnale elettrico che induce, tramite un gioco tra magneti fissi e magneti variati elettricamente, il movimento della membrana o del cono sonori.
Supponiamo che il segnale $f(t)$ sia espresso da un polinomio goniometrico che semplifichiamo giovandoci delle espressioni in forma di esponenziali complessi di Eulero per seni e coseni

$$f(t) = \sum_{j=-n}^{n} A_j e^{i\omega_j t}$$

Per ciascun addendo $A_j e^{i\omega_j t}$ sia

$$\overline{x}_j(t) = \frac{A_j}{-m\omega_j^2 + ir\omega_j + k} e^{i\omega_j t}$$

la soluzione particolare dell'equazione differenziale.
Le soluzioni della equazione differenziale non omogenea saranno pertanto

$$x(t) = \sum_{j=-n}^{n} \frac{A_j}{-m\omega_j^2 + ir\omega_j + k} e^{i\omega_j t} + x_0(t)$$

avendo indicato come al solito con $x_0(t)$ le soluzioni dell'omogenea associata.
Tenuto conto che

$$\lim_{t\to+\infty} x_0(t) = 0$$

si riconosce che, ben presto,

$$x(t) \approx \sum_{j=-n}^{n} \frac{A_j}{-m\omega_j^2 + ir\omega_j + k} e^{i\omega_j t}$$

L'espressione a secondo membro somiglia abbastanza a quella del segnale $f(t)$ ricevuto

- stesso tipo di addendi,
- stesso numero,
- loro coefficienti *abbastanza simili...*

Il termine *abbastanza simili...* corrisponde al fatto che incontriamo gli stessi A_j corretti tuttavia ciascuno dalla divisione per i fattori

$$-m\omega_j^2 + ir\omega_j + k$$

fattori diversi che dipendono dai corrispondenti diversi ω_j.
Se tali fattori a dividere fossero tutti uguali, per esempio tutti 1/100, allora potremmo dire che...

$$x(t) \quad \approx \quad 100\, f(t)$$

ovvero che la vibrazione $x(t)$ é un'amplificazione fedele del segnale $f(t)$ ricevuto.

Se invece, come probabilmente accade inevitabilmente, i fattori a dividere sono diversi tra loro la vibrazione, cioé il suono prodotto, non é un'amplificazione fedele del segnale ricevuto: i suoni corrispondenti ad alcune frequenze ω_j risultano amplificati (o ridotti) piú di quelli corrispondenti ad altre frequenze.
Si ha cioé una distorsione.

Gli amplificatori di buona produzione infatti riportano l'intervallo di frequenze nel quale si comportano in modo fedele.
Si tratta dell'intervallo $\omega \in [a, b]$ nel quale i fattori $-m\omega_j^2+ir\omega_j+k$ sono ragionevolmente tutti uguali (ovvero dove le loro differenze inducono distorsioni inavvertibili dall'orecchio umano).