Argomenti della Lezione

19 gennaio 2012

33. Lo spazio $\mathbb{R}^d$

Si indica con $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$ lo spazio vettoriale

$$\{(x_1, x_2, \dots x_d)\}, \qquad \forall x_j \in \mathbb{R}$$

Posto

$$P = (x_1, x_2, \dots x_d), \quad Q = (y_1, y_2, \dots y_d)$$

la struttura vettoriale ovvia é

$$\alpha P + \beta Q = (\alpha x_1 + \beta y_1,\, \alpha x_2 + \beta y_2, \dots \alpha x_d + \beta y_d)$$

Definizione 33.1. *Si definisce prodotto scalare di due punti*

$$P = (x_1, x_2, \dots x_d), \quad Q = (y_1, y_2, \dots y_d)$$

il numero reale

$$P.Q = \sum_{j=1}^{d} x_j y_j$$

Definizione 33.2. *Si dice norma di $P = (x_1, x_2, \dots x_d)$ il numero non negativo*

$$|P| = \sqrt{P.P} = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} x_j^2}$$

Proposizione 33.3 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)**.**

$$|P.Q| \leq |P|.|Q|$$

Dimostrazione. Basta considerare la positivitá di

$$|P + tQ|^2 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

e scrivere la condizione sul discriminante del relativo polinomio di secondo grado in t. □

Corollario 33.4. *Dalla disuguaglianza precedente segue che*

$$|P + Q| \leq |P| + |Q|$$

Dimostrazione. Consideriamo il quadrato

$$|P + Q|^2 = |P|^2 + 2P.Q + |Q|^2 \leq |P|^2 + 2|P|.|Q| + |Q|^2 = (|P| + |Q|)^2$$

da cui la tesi estraendo la radice quadrata. □

Definizione 33.5. *Si definisce su $\mathbb{R}^d$ una metrica ponendo, per definizione, $dist(P,Q) = |P - Q|$ la distanza di due punti P e Q.*

La distanza definita soddisfa infatti i tre assiomi delle metriche

- simmetria: $dist(P,Q) = dist(Q,P)$
- annullamento: $dist(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$
- disuguaglianza triangolare: $dist(P,Q) \leq dist(P,S) + dist(S,Q)$ infatti posto $A = P - S, B = S - Q$ e quindi $P - Q = A + B$ si ha, per il precedente corollario
$$|A + B| \leq |A| + |B|$$

Osservazione 33.6. *Nel caso semplice di $d = 1$, $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}$ la metrica introdotta é quella usuale della retta*
$$dist(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x - y)^2}$$

Definizione 33.7. *Un insieme E si dice limitato se esiste $\rho \geq 0$ tale che*
$$\forall P \in E : \quad |P| \leq \rho$$

33.1. Successioni convergenti. Una volta posta su $\mathbb{R}^d$ una metrica si puó parlare di successioni $\{P_n\}$ convergenti: la definizione é la stessa delle successioni di numeri reali

Definizione 33.8. *La notazione*
$$\lim_{n\to\infty} P_n = \overline{P}$$
significa che $\forall \varepsilon > 0$ esiste una soglia n_ε tale che
$$n \geq n_\varepsilon \quad \to \quad |P_n - \overline{P}| \leq \varepsilon$$

Valgono ovviamente i noti risultati circa la convergenza delle combinazioni lineari di successioni convergenti, come pure il teorema di limitatezza delle successioni convergenti.

Teorema 33.9. *La successione $\{P_n = (x_1^{(n)}, \ldots, x_d^{(n)})\}$ é convergente se e solo se sono convergenti le d successioni reali*
$$\{x_1^{(n)}\}, \ \{x_2^{(n)}\}, \ \ldots \{x_d^{(n)}\},$$

Dimostrazione. Supponiamo per semplicitá $d = 2$: indicate con $\{x_n\}$ e con $\{y_n\}$ le due successioni delle due coordinate dei punti $\{P_n\}$ e indichiamo con $\overline{P} = (A, B)$ il punto limite.
Riesce
$$|x_n - A| \leq |P_n - \overline{P}|, \quad |y_n - B| \leq |P_n - \overline{P}|$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} |P_n - \overline{P}| = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} |x_n - A| = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} |x_n - A| = 0 \end{cases}$$

Viceversa

$$|P_n - P| \leq \sqrt{2}\, \max\{|x_n - A|, |y_n - B|\}$$

da cui

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} |x_n - A| = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} |x_n - A| = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |P_n - \overline{P}| = 0 \quad \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P_n = \overline{P}$$

□

33.2. Il teorema di Bolzano.

Teorema 33.10. *Ogni successione $\{P_n\} \in \mathbb{R}^d$ limitata ammette sottosuccessioni convergenti.*

Dimostrazione. Supponiamo per semplicitá $d = 2$: le due successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ prime e seconde coordinate dei punti $\{P_n\}$ sono due successioni di numeri reali.
Essendo $\{P_n\}$ limitata anche le due successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sono limitate.
Allora, per il teorema di Bolzano nei reali esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ della prima convergente.
Consideriamo la sottosuccessione della seconda $\{y_n\}$ determinata dagli stessi indici $\{n_1, n_2, ...\}$ che hanno determinato la prima.
La successione $\{y_{n_k}\}$ é limitata, quindi, sempre per il teorema di Bolzano nei reali possiede una sottosuccessione convergente: sia la $\{y_{m_k}\}$.
La successione $\{x_{m_k}\}$, costruita con tali ultimi indici $\{m_1, m_2, \dots\}$ é una sottosuccessione della successione convergente $\{x_{n_k}\}$, quindi é, anch'essa, convergente.
Ma allora la $\{P_{m_k}\}$ ha entrambe le due successioni delle prime e seconde coordinate convergenti, quindi é convergente. □

Teorema 33.11. *Una successione $\{P_n\}$ é convergente se e solo se verifica la condizione di convergenza di Cauchy seguente:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ : \ \forall n, m \geq n_\varepsilon \ |P_n - P_m| \leq \varepsilon$$

33.3. Glossario di topologia.

- insieme C CHIUSO: se $\{P_n\}$ é una successione contenuta in C e convergente allora anche il suo limite appartiene a C;
- insieme K COMPATTO: se ogni $\{P_n\}$ contenuta in K ammette sottosuccessioni convergenti a limiti appartenenti a K;
- insieme A APERTO: se il suo complementare é chiuso;
- punto P interno all'insieme E: se esiste $\rho > 0$ tale che la sfera di centro P e raggio ρ sia contenuta in E;
- punto P esterno ad E: se esiste $\rho > 0$ tale che la sfera di centro P e raggio ρ sia tutta fuori di E;
- punto P di frontiera per E: se ogni sfera di centro P interseca sia E che il suo complementare.

Il teorema di Bolzano permette di riconoscere che

Teorema 33.12. *Un insieme $K \subset \mathbb{R}^d$ é compatto se e solo se é chiuso e limitato*