ANALISI

Argomenti della Lezione

20 gennaio 2012

34. Le funzioni di due variabili

Si possono considerare funzioni

$$f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$$

Limitiamoci al caso

$$f : \; R^2 \to \mathbb{R}^1$$

Esempio 34.1.

$$f(x,y) = \frac{1}{x+y}, \quad g(x,y) = \log(1-x^2-y^2), \quad h(x,y) = \sqrt{3x^2+2y^2-5}$$

Per analogia con la definizione di grafico delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, funzioni di una variabile reale a valori reali, si puó considerare il grafico per funzioni $z = f(x,y)$, funzioni di due variabili reali a valori reali:

- i due valori (x,y) si rappresentano con un punto del piano (cartesiano),
- il valore reale $z = f(x,y)$ si rappresenta con un'altezza sopra il punto (x,y)
- il grafico diventa una superficie (cartesiana) collocata sopra l'insieme dei punti (x,y) sui quali la funzione é definita.

Il grafico di una funzione $z = f(x,y)$ diventa pertanto una superficie dello spazio e come tale viene rappresentata con artifici prospettici.

Per le funzioni $z = f(x,y)$

- non si parla di monotonia, per il semplice motivo che non si parla di ordinamento per i punti del piano,
- si parla di confronto, cioé ha senso dire $f(x,y) \le g(x,y)$. quindi si parla di funzioni positive o di funzioni negative, di funzioni limitate,
- si parla di limiti, cioé ha senso la ricerca

  $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

  si parla quindi anche di continuitá.
- i profili altimetrici,
- le curve di livello.

34.1. False funzioni di due variabili.

- una funzione di una sola variabile puó essere vista come una funzione di due variabili, costante rispetto a d una di esse,
- $f(x, y) = F(ax+by)$ é una generalizzazione del caso precedente
- $f(x, y) = F(\sqrt{x^2 + y^2})$ funzioni radiali.

34.2. Limiti e continuitá. Le definizioni di limite e di continuitá dipendono esclusivamente dal riconoscere la convergenza o meno dei valori $f(P_n)$ allorché i punti P_n convergono a $\overline{P}$.

Osservazione 34.2. *La convergenza dei valori $f(P_n)$ si valuta meglio esprimendo*

$$P_n = \overline{P} + (P_n - \overline{P})$$

e riconoscendo che esiste il limite

$$\lim_{|P_n - \overline{P}| \to 0} f(P_n)$$

In altri termini la convergenza deve essere riconosciuta come conseguenza dell'avvicinamento dei P_n a $\overline{P}$ senza dipendere in alcun modo dalla traiettoria di avvicinamento.

Esempio 34.3. *Si consideri al riguardo il*

$$\lim_{P(x,y) \to O=(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Basta esplorare i valori della funzione assegnata lungo le varie rette $y = mx$ per accorgersi che su ciascuna di esse la funzione é costante

$$\frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1 + m^2}$$

con valori della costante diversi da retta a retta.
Quindi non é vero che i valori della funzione si stabilizzino su un qualche valore al tendere di (x, y) a $(0, 0)$.
Quindi non esiste il limite considerato.

Per cercare il limite

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = \ell$$

é particolarmente utile il ricorso a coordinate polari:

- si esprime (x, y) con

  $$\begin{cases} x = x_0 + \rho \cos(\theta) \\ y = y_0 + \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

  avendo indicato con $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ la distanza di (x, y) da (x_0, y_0)

- riesce pertanto
$$|f(x,y)-\ell| = g(\rho,\theta)$$
- la convergenza di $f(x,y)$ a ℓ avviene tutte le volte che
$$|g(\rho,\theta)| \le M\rho^\alpha$$
con $\alpha > 0$.

34.3. Derivate direzionali. Il rapporto incrementale
$$\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$
che si incontrava per le funzioni $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si generalizza, nel caso di funzioni $f: \ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \ d > 1$ come segue:
assegnato un versore $\overrightarrow{v}$ si considera, indicato con $P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_d^{(0)})$, il rapporto
$$\frac{f(P_0 + h\overrightarrow{v}) - f(P_0)}{h}$$
Se esiste il limite per $h \to 0$ si pone
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(P_0 + h\overrightarrow{v}) - f(P_0)}{h} = f'_{\overrightarrow{v}}(P_0)$$
valore che si dice

derivata di f in P_0 secondo la direzione $\overrightarrow{v}$

In particolare se
$$\overrightarrow{v_m} = (0,\dots,1,0,\dots,0)$$
versore con la sola componente m uguale a 1 e nulle tutte le altre il limite
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(P_0 + h\overrightarrow{v_m}) - f(P_0)}{h} = f'_{\overrightarrow{v_m}}(P_0)$$
prende il nome di

derivata parziale rispetto a x_m

Ad esempio per $d = 2$ i versori hanno tutti la forma
$$\overrightarrow{v} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$$
e riesce
$$\frac{f(P_0 + h\overrightarrow{v}) - f(P_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h\cos(\alpha), y_0 + h\sin(\alpha)) - f(x_0,y_0)}{h}$$
In particolare per $\alpha = 0$ il corrispondente versore é $(1,0)$ che rappresenta la direzione dell'asse x, mentre per $\alpha = \pi/2$, $(0,1)$ rappresenta la direzione dell'asse y.

La derivata direzionale secondo la direzione dell'asse x

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

prende il nome di

derivata parziale rispetto ad x

La derivata direzionale secondo la direzione dell'asse y

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

prende il nome di

derivata parziale rispetto ad y

Osservazione 34.4. *Le derivate parziali rispetto a x o rispetto a y di $f(x, y)$ nel punto assegnato (x_0, y_0) si calcolano molto semplicemente considerando rispettivamente le derivate ordinarie delle due funzioni di una variabile*

$$f(x, y_0), \quad f(x_0, y)$$

Definizione 34.5. *Il vettore formato dalle derivate parziali di $f(x_1, \ldots, x_d)$ si chiama gradiente di f e si indica con*

$$\nabla f(x_1, \ldots, x_d)$$

Teorema 34.6. *Se $f(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ ha le due derivate parziali continue allora ha anche le derivate lungo qualunque altra direzione*

$$\overrightarrow{v} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d)$$

e riesce

$$f'_{\overrightarrow{v}}(P_0) = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)$$

Tenuto conto che, per $d = 2$ o $d = 3$ detto θ la misura dell'angolo tra il vettore $\overrightarrow{v}$ della direzione assegnata e il vettore $\nabla f(x_1, \ldots, x_d)$ riesce

$$f'_{\overrightarrow{v}}(P_0) = \nabla f(P_0).\overrightarrow{v} \cos(\theta)$$

si riconosce che

- $|f'_{\overrightarrow{v}}(P_0)| \leq |\nabla f(P_0)|$
- la derivata $f'_{\overrightarrow{v}}(P_0)$ ha il valore massimo quando $\overrightarrow{v}$ rappresenta la direzione stessa del gradiente,
- la direzione del gradiente indica la direzione secondo la quale il valore della funzione aumenta di piú.