ANALISI

Argomenti della Lezione

25 gennaio 2012

35. Curve, lunghezze, integrali curvilinei

35.1. Curve regolari.

Definizione 35.1. *Una curva regolare* Φ *é una funzione*

$$\phi:\ I=[a,b]\to\mathbb{R}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x(t):\ I\to\mathbb{R}\\ y(t):\ I\to\mathbb{R}\end{cases}$$

continua, con derivata prima $\phi'(t)=\{x'(t),y'(t)\}$ *continua e diversa da zero in ogni punto.*
I punti $\phi(a)=(x(a),y(a))$ *e* $\phi(b)=(x(b),y(b))$ *si dicono primo estremo e secondo estremo della curva.*
Se gli estremi coincidono la curva si dice chiusa.

Ogni decomposizione dell'intervallo $a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$ *determina la poligonale di vertici*

$$(x(a),y(a)),(x(t_1),y(t_1)),\ldots,(x(t_{n-1}),y(t_{n-1})),(x(b),y(b))$$

che si dice inscritta nella curva Φ.

L'immagine

$$\phi(I)\subset\mathbb{R}^2$$

rappresenta un oggetto che corrisponde all'idea intuitiva di curva geometrica.

Esempio 35.2. *Consideriamo la curva regolare*

$$x(t)=t,\quad y(t)=1-t,\quad t\in[0,1]$$

L'immagine é il segmento di estremi $(0,1)$ *e* $(1,0)$.

Definizione 35.3. *L'unione di un numero finito* $\{\Phi_1,\Phi_2,\ldots,\Phi_n\}$ *di curve regolari tali che il primo estremo della* Φ_{k+1} *coincida con il secondo estremo della* Φ_k *per* $k=1,\ldots,n-1$ *si dice curva regolare a tratti.*
Se le curve $\{\Phi_1,\Phi_2,\ldots,\Phi_n\}$ *sono tutti segmenti la curva si dice poligonale.*

Esempio 35.4. *Un quadrato costituisce una curva regolare a tratti.*

Consideriamo

$$\begin{cases} \Phi_1: & x(t) = t, & y(t) = 0, & t \in [0,1] \\ \Phi_2: & x(t) = 1, & y(t) = t, & t \in [0,1] \\ \Phi_3: & x(t) = 1-t, & y(t) = 1, & t \in [0,1] \\ \Phi_4: & x(t) = 0, & y(t) = 1-t, & t \in [0,1] \end{cases}$$

Tenuto conto che

$$\phi_1(1) = \phi_2(0), \quad \phi_2(1) = \phi_3(0), \quad \phi_3(1) = \phi_4(0)$$

si riconosce che le quattro curve regolari assegnate, quattro segmenti, costituiscono una curva regolare a tratti il quadrato di vertici

$$(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$$

che costituisce inoltre una curva regolare a tratti chiusa, una poligonale.

La condizione $\phi'(t) \neq 0$ garantisce che in ogni punto dell'immagine $\phi(I)$ sia definita la retta tangente

$$\begin{cases} x = x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) \\ y = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) \end{cases}$$

Nel caso di una curva regolare a tratti Γ la tangente puó mancare negli estremi delle curve regolari che costituiscono Γ.

Osservazione 35.5. *É naturale che*

$$\phi(I) = \psi(J)$$

non implica che le due curve

$$\phi: I \to \mathbb{R}^2, \quad \psi: J \to \mathbb{R}^2$$

siano la stessa curva.
Le espressioni $\phi(t)$, $\quad \psi(t)$ rappresentano, in senso cinematico, le leggi orarie con le quali tale immagine é percorsa.

Esempio 35.6. *Il segmento di estremi $(0,0)$ e $(1,1)$ é l'immagine, ad esempio delle due curve*

$$x(t) = y(t) = t, \, t \in [0,1], \quad x(t) = y(t) = t^2, \, t \in [0,1]$$

In termini di legge oraria nel primo caso si tratta di un movimento a velocitá costante, nel secondo no, piú lento inizialmente, piú veloce verso la fine.

Esempio 35.7. *La circonferenza*

$$x(t) = r\cos(t), \, y(t) = r\sin(t), \; t \in [0, 2\pi]$$

é una curva regolare.

La curva regolare

$$x(t) = r\cos(t),\ y(t) = r\sin(t),\ \ t \in [0, 4\pi]$$

é una circonferenza... percorsa due volte !

35.2. Lunghezza di una curva. La lunghezza dei segmenti o delle poligonali é del tutto naturale.
Tenuto presente che in ogni curva regolare a tratti si possono inscrivere poligonali si assume la seguente definizione di lunghezza:

Definizione 35.8. *La lunghezza di una curva regolare é l'estremo superiore delle lunghezze delle poligonali inscritte.*

Si puó riconoscere che se $x(t), y(t) \in C^2([a,b])$ la lunghezza ℓ della curva, cioé l'estremo superiore delle poligonali inscritte coincide con l'integrale

$$\ell = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$$

Il risultato é collegato alla possibilitá di approssimare la lunghezza di ognuno dei segmenti

$$\ell_k = \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}$$

delle poligonali inscritte nella curva con

$$\sqrt{x'^2(t_k) + y'^2(t_k)}(t_k - t_{k-1})$$

e quindi riconoscendo che

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x'^2(t_k) + y'^2(t_k)}(t_k - t_{k-1}) \approx \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$$

La lunghezza di una curva regolare a tratti é assunta, per definizione come la somma delle lunghezze dei tratti regolari che la compongono.

La lunghezza ℓ di una curva $\mathcal{C}$ si indica anche con

$$\ell = \int_{\mathcal{C}} ds$$

simbolo che sottintende il precedente integrale

$$\int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$$

Il simbolo ds si chiama, spesso, elemento di lunghezza.

Detti A il primo estremo e $P = \phi(t_P) \in \mathcal{C}$ la lunghezza della porzione di curva $\mathcal{C}_{A,P}$, $t \in [a, t_P]$ da A a P associa ad ogni $P \in \mathcal{C}$ un numero reale non negativo $s(P)$

$$s = \int_{\mathcal{C}_{A,P}} ds$$

che si chiama

ascissa curvilinea di P

35.3. Integrali curvilinei. Assegnate

- una curva regolare

$$\mathcal{C} : \ \phi : [a, b] \to \mathbb{R}^2, \ \ \phi(t) = (x(t), y(t))$$

- una funzione $f(x, y)$ definita sui punti di $\mathcal{C}$,

si definisce

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y)\, ds = \int_a^b f[x(t), y(t)] \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$$

Tale valore prende il nome di

integrale curvilineo di f esteso alla curva $\mathcal{C}$.

Osservazione 35.9. *Nel caso in cui $\mathcal{C}$ coincida con l'intervallo $[a, b]$ dell'asse x l'integrale curvilineo*

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y) ds = \int_a^b f(x, 0) dx$$

Analogamente se $\mathcal{C}$ coincide con il segmento di estremi (a, k) e (b, k) l'integrale curvilineo

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y) ds = \int_a^b f(x, k) dx$$

Si considerano anche integrali curvilinei estesi a curve regolari a tratti, intendendo naturalmente la somma degli integrali curvilinei relativi a ciascun tratto regolare.

35.4. Il significato geometrico. Nel caso $f(x, y) \geq 0$ l'integrale curvilineo

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y) ds$$

rappresenta l'area della superficie verticale costruita sulla curva $\mathcal{C}$ di altezza $f(x, y)$ in corrispondenza di ogni punto $(x, y) \in \mathcal{C}$.
Si ritrova in particolare, nel caso che $\mathcal{C}$ sia il segmento $[a, b]$ dell'asse x il noto significato di area attribuibile all'integrale delle funzioni non negative.

Esempio 35.10. $\boxed{\displaystyle\int_\gamma xy^4\, ds, \quad \gamma : x^2 + y^2 = 16,\ x \geq 0}$

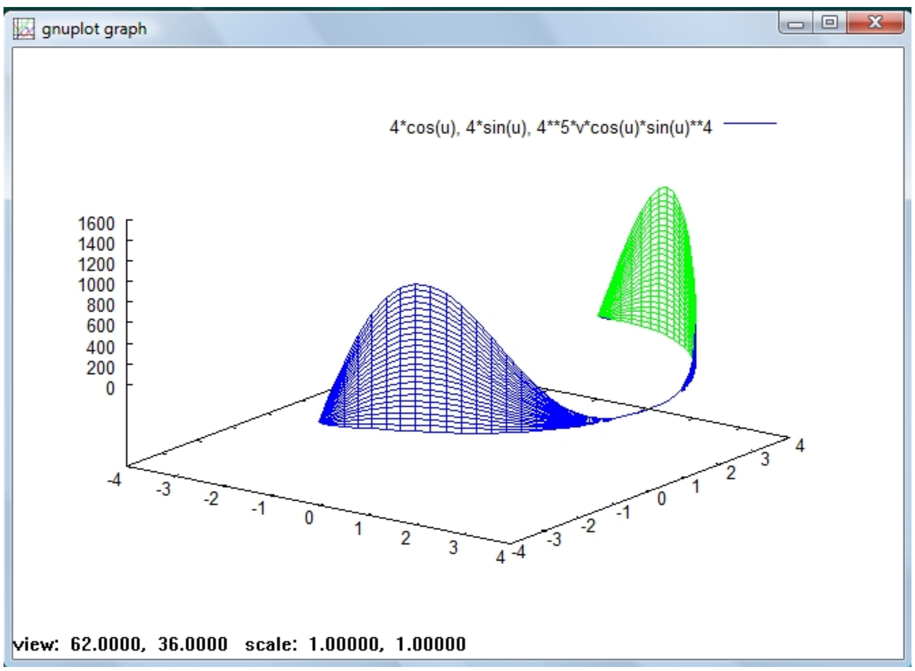

FIGURA 1. $\displaystyle\int_\gamma xy^4\, ds, \quad \gamma : x^2 + y^2 = 16,\ x \geq 0$

$$\int_\gamma xy^4\, ds = 4^6 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t) \sin^4(t) \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)} dt = 4^6 \frac{2}{5}$$

La figura 1 indica il significato geometrico dell'integrale curvilineo proposto: si tratta dell'area di un muro costruito sulla semicirconferenza circonferenza di centro l'origine e raggio 4 *alto in ogni punto* (x, y), $x \geq 0$ *il valore* xy^4.

35.5. Il lavoro di una forza. Assegnati

- una curva regolare
$$\mathcal{C}:\ \phi : [a,b] \to \mathbb{R}^2,\ \ \phi(t) = (x(t), y(t))$$
- un campo di forze
$$\mathcal{L} = \overrightarrow{F}(x,y) = \{A(x,y), B(x,y)\}$$
definito sui punti di $\mathcal{C}$,

si definisce lavoro $\mathcal{L}$ di $\overrightarrow{F}(x,y)$ lungo $\mathcal{C}$ il valore dell'integrale curvilineo
$$\mathcal{L} = \int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\tau}\, ds$$
essendo $\overrightarrow{\tau}$ uno (dei due) versori tangenti alla curva.
Il lavoro $\mathcal{L}$, tenuto conto che
$$\overrightarrow{\tau} = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}\,\{x'(t),\ y'(t)\}$$
si calcola con l'integrale
$$\int_a^b \{A[x(t), y(t)]x'(t) + B[x(t), y(t)]y'(t)\}\, dt$$