Il logaritmo e l'esponenziale

2 gennaio 2012

La definizione di logaritmo che si impara nella scuola secondaria è la seguente:

Definizione 1 *Il logaritmo in base b di x è l'esponente cui si deve elevare b per ottenere x. In formule: $b^{\log_b x} = x$*

Con questa definizione si può stabilire, ad esempio, che $\log_{10} 100 = 2$ e $\log_{10} 1000 = 3$ o che $\log_2 16 = 4$ e $\log_2 32 = 5$. Ma si tratta di una definizione che cessa di essere naturale quando si parla di logaritmi di numeri che non sono potenze intere della base. Per trovare (o meglio approssimare) il logaritmo di un numero qualsiasi x, sarà necessario prendere in esame un bel po' di numeri del tipo $b^{n/m}$ per cercarvi quello che meglio approssima x, e dichiarare che il corrispondente esponente n/m è una buona approssimazione di $\log_b x$. Dal punto di vista pratico, oltre che concettuale, non si tratta di operazioni semplici.

Eppure tutti sanno che da alcuni secoli sono state accuratamente compilate tavole dei logaritmi in base 10 o di "logaritmi naturali" cioè in base e, e che queste tavole, assieme al "regolo calcolatore" (un attrezzo meccanico che le sostituiva) risultavano indispensabili, prima dell'avvento dei calcolatori elettromeccanici e poi elettronici, per fare calcoli appena un pò complicati.

Quel che rendeva i logaritmi così utili era il fatto che è più semplice sommare due numeri che moltiplicarli. Il logaritmo ha la proprietà di trasformare un prodotto in una somma, semplicemente perché la moltiplicazione di due potenze con la stessa base dà luogo ad una potenza della stessa base con esponente che è somma degli esponenti. Questo significa che se si è in grado di calcolare i logaritmi di due numeri (ad esempio attraverso le tavole) si possono sommare i logaritmi e poi andare alla ricerca (sempre attraverso le tavole) del numero il cui logaritmo fornisce la somma trovata. Questo numero sarà il prodotto dei due numeri dati. In formule, dati due numeri x e y, si trovano i valori $\log x$ e $\log y$, si considera la somma $\log x + \log y$, e si va alla ricerca del numero z tale che $\log z = \log x + \log y$. Si avrà allora che $z = xy$.

Il concetto di logaritmo era probabilmente noto anche ai matematici dell'antica Grecia (in epoca ellenistica), ma per applicare il procedimento descritto nella semplificazione dei calcoli era necessario disporre di "tavole" con i valori della funzione logaritmo (rispetto ad una base opportunamente scelta). La redazione di queste tavole era possibile anche prima dell'invenzione della stampa, ma risultava poco economica. Non solo la copiatura era un processo costosissimo, ma anche un processo soggetto a molti errori. E' stata quindi l'invenzione della stampa a rendere possibile la redazione delle tavole dei logaritmi, come strumento per semplificare i calcoli. I costi (non indifferenti) della compilazione di tavole accurate potevano essere ripartiti tra migliaia di utenti, stampando le tavole in migliaia di copie.

Non bisogna sottovalutare l'importanza che questo strumento ha avuto per lo sviluppo della scienza e della tecnologia moderna. Come si è detto, almeno fino all'avvento delle prime calcolatrici elettromeccaniche, che credo siano state introdotte nel mercato negli anni trenta del secolo scorso (cioè non più di due generazioni fa), le tavole dei logaritmi ed il "regolo calcolatore" costituivano uno strumento indispensabile per la progettazione. Senza di esse i calcoli necessari per la progettazione di macchine, di navi, di aeromobili, di armi, o di manufatti edilizi sarebbero stati troppo complicati se non impossibili. Anche sul piano del costume, il "regolo calcolatore" nel taschino di un tecnico o di un ingegnere, fino a 40 anni fa, aveva lo stesso valore simbolico che ha, ancora oggi, lo stetoscopio che penzola dalla tasca del camice di un medico.

Tuttavia, al giorno d'oggi le tavole dei logaritmi ed il "regolo calcolatore" sono "pezzi da museo". A che scopo quindi parlarne?

Questa piccola introduzione storica mi serve per mettere l'accento sul fatto che l'importanza del logaritmo o della funzione logaritmo non è tanto legata alla sua definizione come "esponente". Essa è piuttosto legata alla proprietà algebrica che come vedremo, sotto certe condizioni, caratterizza il logaritmo. E cioè la proprietà di trasformare i prodotti in somme.

In effetti possiamo arrivare al logaritmo andando semplicemente alla ricerca di una funzione continua, L, definita sui numeri reali che, per x ed y nel dominio della funzione, soddisfa alla condizione:

$$L(xy) = L(x) + L(y). \tag{1}$$

In questo modo riusciremo ad evitare di definire subito che cosa si intenda per una potenza irrazionale di un numero reale. Non saremo costretti, in altri termini, a definire espressioni come b^π o anche semplicemente $b^{\sqrt{2}}$.

Osserviamo subito che la condizione (1) è soddisfatta dalla funzione definita su tutto $\mathbb{R}$ che vale sempre zero. Vogliamo, naturalmente, escludere questa funzione. Osserviamo anche che se 0 appartiene al dominio della funzione L la condizione (1) implica che L è identicamente nulla. Infatti poiché $0 \cdot 0 = 0$ si avrebbe$L(0) = 2L(0)$, che fornisce $L(0) = 0$. Inoltre per ogni $x \neq 0$, appartenente al dominio, $0 = L(x \cdot 0) = L(x) + L(0) = L(x)$. Dobbiamo quindi supporre che il dominio di L non contenga 0. La condizione (1) implica anche che $L(1) = L(1) + L(1) = 2L(1)$. Pertanto $L(1) = 0$.

Troveremo intanto una funzione che che soddisfa (1) ed è definita per tutti i numeri reali positivi. Eccola:

$$L(x) = \int_1^x \frac{1}{t} \quad dt. \tag{2}$$

Si tratta evidentemente di una funzione definita per ogni $x > 0$, poiché $\frac{1}{t}$ è una funzione continua e decrescente nell'intervallo che ha estremi 1 e x, quando $x > 0$. Osserviamo che $L(x) > 0$ se $x > 1$, e che $L(x) < 0$ se $0 < x < 1$. Ovviamente $L(1) = 0$. Dimostriamo ora che L soddisfa la (1). La proprietà "additiva" dell'integrale ci dice che:

$$\int_1^{xy} \frac{1}{t} \quad dt = \int_1^x \frac{1}{t} \quad dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t} \quad dt.$$

Dimostreremo ora che

$$\int_x^{xy} \frac{1}{t} \quad dt = \int_1^y \frac{1}{t} \quad dt. \tag{3}$$

Supponiamo per semplcità che sia $y > 1$. L'integrale a primo membro della (3) può essere approssimato, ad esempio, dalle somme, che secondo la definizione, approssimano l'integrale dal di sotto. (Queste somme si chiamano talvolta somme inferiori di Darboux, altre volte somme inferiori di Riemann, il nome usato dalle dispense è "somma integrale per difetto"). Approfittiamo del fatto che la funzione $\frac{1}{t}$ è decrescente per $t > 0$. Ci conviene allora, come sappiamo, utilizzare partizioni dell'intervallo $[x, xy]$ in sottointervalli tutti della stessa lunghezza. La lunghezza di $[x, xy]$ è $x(y-1)$, ed i punti di una partizione che divida l'intervallo in n parti uguali sono:

$$\{x, x + \frac{x(y-1)}{n}, x + 2\frac{x(y-1)}{n}, \ldots x + k\frac{x(y-1)}{n}, \ldots, xy\}.$$

In altre parole la partizione considerata è formata dai punti

$$x_k = x + k\frac{x(y-1)}{n},$$

per $k = 0, \ldots, n$. La comune lunghezza degli intervalli della partizione è, come si è detto $\frac{x(y-1)}{n}$, mentre il minimo della funzione $\frac{1}{t}$ su ognuno degli intervalli della partizione è raggiunto all'estremo destro dell'intervallo. Pertanto la somma inferiore di Darboux relativamente a questa partizione sarà:

$$\frac{x(y-1)}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x + kx\frac{(y-1)}{n}} = \frac{(y-1)}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + k\frac{(y-1)}{n}}. \tag{4}$$

Il secondo membro di questa uguaglianza non è altro che la somma inferiore di Darboux relativa alla partizione dell'intervallo $[1, y]$ in n intervalli di uguale lunghezza, relativamente alla funzione $1/t$. Al crescere di n la somma (4) approssima quindi il comune valore:

$$\int_x^{xy} \frac{1}{t} \quad dt = \int_1^y \frac{1}{t} \quad dt.$$

Abbiamo così dimostrato la (1). Vediamo qualche ulteriore proprietà della funzione L.

Prima di tutto osserviamo che la funzione $L(x)$ è continua. Infatti se $[a.b]$ è un intervallo di numeri positivi (cioè $a > 0$), nell'intervallo $[a, b]$ la funzione $L(x)$ è anche lipschtiziana. Infatti, per tutti gli $x_1, x_2 \in [a, b]$, risulta:

$$|L(x_1) - L(x_2)| = |\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{t} \quad dt| \leq \frac{1}{a}|x_1 - x_2|.$$

Enunciamo le altre proprietà attraverso esercizi.

Esercizio 1 *La funzione $L(x)$ è strettamente crescente nel suo dominio di definizione.*

Esercizio 2 *La funzione $L(x)$ è illimitata superiomente ed inferiormente. Pertanto*

$$\lim_{x \to +\infty} L(x) = +\infty,$$

e

$$\lim_{x \to 0} L(x) = -\infty$$

(Suggerimento: osservare che $L(2^n) = nL(2)$ e $L(2^{-n}) = -nL(2)$.)

L'esercizio immediatamente precedente ci assicura che la funzione L assume tutti i valori reali. Poiché L è strettamente crescente ne possiamo definire la funzione inversa che chiameremo $E(x)$. Cioè $E(x)$ è l'unica funzione definita su tutti i numeri reali che soddisfa $E(L(x)) = x$. A questo punto possiamo definire $E(1)$ come il numero tale che $L(E(1)) = 1$. Dimostreremo che

$$E(1) = \lim_n (1 + \frac{1}{n})^n = e. \tag{5}$$

Infatti

$$L((1 + \frac{1}{n})^n) = n \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{t} \quad dt.$$

Il teorema del valore medio per gli integrali ci dice che per ogni intero positivo n, esiste un punto c_n con $1 < c_n < 1 + \frac{1}{n}$, tale che

$$\int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{t} \quad dt = \frac{1}{n} \frac{1}{c_n}.$$

Questo significa che

$$L((1 + \frac{1}{n})^n) = \frac{1}{c_n}.$$

Osserivamo a questo punto che $\lim_n c_n = 1$. Pertanto dalla continuità di L, segue che

$$1 = \lim_n \frac{1}{c_n} = \lim_n L((1 + \frac{1}{n})^n) = L(e).$$

In conclusione $L(e) = 1$.

Possiamo allora osservare che se x è un numero razionale $L(e^x) = xL(e) = x$. Poiché L è una funzione iniettiva e risulta sempre $L(E(x)) = x$, ne segue che $E(x) = e^x$, quando il secondo membro è definito (cioè, per ora, per x razionale). D'altra parte $E(x)$ è una funzione continua, in quanto inversa di una funzione continua e crescente (cfr l'esercizio che segue). Possiamo quindi porre $e^x = E(x)$ anche per i numeri irrazionali, ottenendo in tal modo una estensione di e^x a tutti i numeri reali. La funzione $x \mapsto e^x$, è allora continua e crescente. A questo punto, possiamo riconoscere che $L(x)$ corrisponde alla usuale definizione dei logaritmi in base e. In altre parole

$$L(x) = \log_e x.$$

Abbiamo detto che la funzione $E(x)$ è continua, in quanto funzione inversa di una funzione continua strettamente decrescente, definita in un intervallo. A questa osservazione dovrebbe corrispondere una dimostrazione che lasceremo per esercizio (non facile, e quindi non obbligatorio).

Esercizio 3 *Dimostrare (completando quanto accennato nel suggerimento) che se f è una funzione continua strettamente crescente o strettamente decrescente definita per tutti i punti di un intervallo I, e g è la funzione inversa di f definita sull'intervallo $f(I)$, in modo da soddisfare la condizione*

$g(f(x)) = x$, allora g è continua su tutto l'intervallo $f(I)$. Suggerimento: supponiamo f crescente; sia $a = f(b) \in f(I)$, supponiamo che a non sia un estremo dell'intervallo $f(I)$ (e se invece fosse un estremo?), allora dato $\varepsilon > 0$, possiamo supporre che $a-\varepsilon$ e $a+\varepsilon$ appartengano ad $f(I)$ (perché questa ipotesi non ci fa perdere generalità?) pertanto esistono punti $x_1 < x_2 \in I$, tali che $f(x_1) = a - \varepsilon < a < a + \varepsilon = f(x_2)$. Sia $0 < \delta < \min(b - x_1, x_2 - b)$. Allora se $a - \delta < y < a + \delta$, risulta $g(y) \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Esercizio 4 *Dimostrare che se $x > 0$ allora*

$$\lim_n (1 + \frac{x}{n})^n = E(x).$$

Osserviamo che molte altre funzioni soddisfano alla condizione (1). Infatti se $c \neq 0$ la funzione $cL(x)$ soddisfa la (1). Un risultato importante, che non dimostreremo qui, è che questo è l'unico modo di definire funzioni continue che soddisfano la (1). In altre parole se f è continua, è definita sui numeri reali positivi, e soddifa $f(xy) = f(x) + f(y)$, allora esiste un numero reale c, tale che $f(x) = cL(x)$. Osserviamo però che se b è un numero positivo diverso da uno, la funzione $\log_b x$ può essere definita come un opportuno multiplo reale di $L(x)$. In tal modo la funzione $\log_b x$ risulta continua e definita per ogni numero reale positivo.

Esercizio 5 *Dato un numero reale $b > 0$ diverso da uno, trovare c tale che $\log_b x = cL(x)$. Studiare la funzione $\log_b x$ distinguendo i casi $0 < b < 1$ e $1 < b$.*

Riserviamo all'ultimo esercizio il compito di definire per un numero positivo b diverso da uno e qualsiasi x reale la potenza b^x.

Esercizio 6 *Sia $c = L(b) \neq 0$. Dimostrare che la funzione e^{cx} è un'estensione continua della funzione b^x, definita sui numeri razionali.*

Riassumiamo ora la procedura seguita per arrivare a definire, prima di tutto, il logaritmo naturale $\log_e x$ e l'esponenziale e^x, ed in secondo luogo le fuzioni $\log_b x$ e b^x, dove b è un numero positivo diverso da zero.

1) Abbiamo trovato una funzione $L(x)$ definita su tutti i numeri reali positivi, che soddisfa $L(xy) = L(x) + L(y)$, per ogni $x, y > 0$. La funzione L è definita come:

$$L(x) = \int_1^x \frac{1}{t} \quad dt.$$

2) Abbiamo osservato che $L(x)$ è strettamente crescente e che $\lim_{x\to+\infty} L(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 0+} L(x) = -\infty$. Pertanto l'immagine $L(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}$.

3) Abbiamo introdotto la funzione inversa $E(x)$ come la funzione, necessariamente continua e crescente che soddisfa

$$E(L(x)) = x.$$

4) Abbiamo dimostrato che $E(e) = 1$, dove

$$e = \lim_n (1 + \frac{1}{n})^n.$$

5) Abbiamo dedotto dal fatto che $E(e) = 1$, la formula $E(x) = e^x$, per ogni numero x razionale. A questo punto la stessa formula, utilizzata come definizione, per qualsiasi numero reale, dà luogo ad una estensione della funzione $x \mapsto e^x$ a tutto il campo reale. Questa definizione della funzione esponenziale la rende automaticamente una funzione continua e crescente definita su tutti i numeri reali.

6) Se $b > 0$ è un numero diverso da uno, si possono allora definire le funzioni b^x, e $\log_b x$ definite rispettivamente su tutta la retta reale, e sui numeri reali positivi, come

$$b^x = e^{L(b)x} = e^{x \log_e b},$$

e

$$\log_b x = \frac{1}{L(b)} L(x) = \frac{1}{L(b)} \log_e x.$$