Corso di laurea in Matematica, a.a. 2002/03
Università di Roma "La Sapienza"

Note per il corso

Analisi Matematica I

Parte II: Integrali impropri, Successioni di funzioni

scritte ad otto mani da
P. D'Ancona, C. Mascia, V. Nesi & L. Orsina

CAPITOLO 3

Integrali impropri

`Versione del 14 marzo 2003`

1. Dai primi esempi alla definizione

Fin qui sappiamo che senso dire che una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata è *integrabile*. E' esperienza quotidiana (?) confrontarsi col problema di dare senso all'integrale definito anche in situazioni più generali. In particolare, si vorrebbero rimuovere le ipotesi di:

(i) $[a,b]$ intervallo limitato;

(ii) f funzione limitata.

Rimuovendo (i) e/o (ii) si passa da una situazione in cui il grafico di f è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^2$, ad una in cui il grafico di f è illimitato.

Ad esempio, si vorrebbe dare un significato opportuno a espressioni del tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

(sapete riconoscere perché nessuno di questi integrali rientra nella definizione di integrale di Riemann già vista in precedenza?). Oppure si potrebbe desiderare dare senso alla parola "area" di regioni illimitate del piano delimitate dall'asse x e il grafico di una funzione positiva: ad esempio, ha senso parlare dell'area delimitata dal ramo dell'iperbole di equazione $xy = 1$ che si trova nel primo quadrante e dalle semirette $\{(x,y) : x \geq 0\}$ e $\{(x,y) : y \geq 0\}$? Come comportarsi? Partiamo da due esempi semplici.

Esempio 1.1. Dato $\alpha > 0$, consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \qquad x \in (0,1].$$

Dato che la funzione f non è limitata in $(0,1]$ non è possibile definire istantaneamente il suo integrale definito. Il problema è legato al (cattivo) comportamento della funzione f nel punto $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty.$$

Se consideriamo la restrizione della funzione all'intervallo $[\varepsilon, 1]$, dove $\varepsilon \in (0,1)$, l'integrale definito ha senso e vale:

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(1-\varepsilon^{1-\alpha}\right) & \text{se } \alpha \neq 1, \\ -\ln \varepsilon & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

A questo punto, è più che ragionevole far tendere $\varepsilon \to 0^+$ (Fig.1(a)), ottenendo

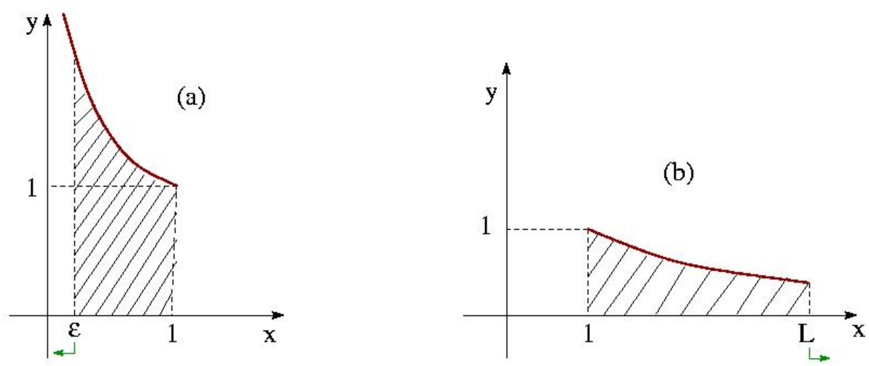

FIGURA 1. L'area della zona tratteggiata è: (a) $\int_\varepsilon^1 x^{-\alpha}\,dx$; (b) $\int_1^L x^{-\alpha}\,dx$.

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1, \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Alla luce di questo risultato, è naturale dire che la funzione $x^{-\alpha}$ è *integrabile* in $(0,1]$ se $\alpha < 1$, e non lo è se $\alpha \geq 1$.

ESEMPIO 1.2. Dato $\alpha > 0$, consideriamo la stessa funzione in un insieme diverso

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \qquad x \in [1, +\infty).$$

Il problema della singolarità in $x = 0$ non appare, dato che stiamo considerando la funzione per $x \geq 1$. Anche in questo caso, però, non è possibile definire l'integrale nel senso classico, dato che l'insieme di definizione è un intervallo illimitato. Nello stesso spirito dell'esempio precedente, riconduciamoci ad una situazione in cui l'integrale abbia senso e poi passiamo al limite. Dato $L > 1$,

$$\int_1^L \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(L^{1-\alpha}-1\right) & \text{se } \alpha \neq 1, \\ \ln L & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

Passando al limite per $L \to +\infty$ (Fig.1(b)),

$$\lim_{L\to+\infty} \int_1^L \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1} & \text{se } \alpha > 1, \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Esattamente come nel caso di prima, è naturale affermare che $x^{-\alpha}$ è *integrabile* in $[1, +\infty)$ se $\alpha > 1$ e non lo è se $\alpha \leq 1$.

L'idea nella definizione dell'integrale improprio è tutta qui: rincondursi ad un integrale in senso classico e poi passare al limite. Nel caso in cui il limite esista finito, la funzione si dirà *integrabile* (nell'insieme considerato), nel caso in cui il limite non esista o esista, ma valga $+\infty$ o $-\infty$ la funzione si dirà *non integrabile.* L'idea è sostanzialmente la stessa che ispira la definizione di sommabilità di una serie: ci si riconduce ad un oggetto ben definito (la somma di un numero finito di termini) e poi si passa al limite.

Definizione 1.3. *Sia $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in $[c, b]$ per ogni $c \in (a, b)$. La funzione f si dice* INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO IN $(a, b]$ *se esiste finito il limite*

$$\lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\, dx =: \int_a^b f(x)\, dx,$$

*il valore del limite è l'*INTEGRALE IMPROPRIO DI f IN $(a, b]$.

Analogamente, sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in $[a, L]$ per ogni $L > a$. La funzione f è INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO IN $[a, +\infty)$ *se esiste finito il limite*

$$\lim_{L\to+\infty} \int_a^L f(x)\, dx =: \int_a^{+\infty} f(x)\, dx,$$

*e il valore del limite è l'*INTEGRALE IMPROPRIO DI f IN $[a, +\infty)$.

Chiaramente nel caso di una funzione definita in $[a, b)$ e integrabile in $[a, c]$ per ogni $c \in (a, b)$, l'integrale improprio è definito tramite il limite

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\, dx,$$

e nel caso di $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$, integrabile in $[L, b]$ per ogni $L < b$ tramite

$$\int_{-\infty}^b f(x)\, dx := \lim_{L\to-\infty} \int_L^b f(x)\, dx.$$

Esempio 1.4. La funzione $f(x) = e^{-x}$ essendo continua su $\mathbb{R}$ è anche integrabile in $[a, b]$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. Dato $a \in \mathbb{R}$, f è integrabile in senso improprio in $[a, +\infty)$? E in $(-\infty, a]$? La risposta è SI nel primo caso e NO nel secondo: infatti

$$\int_a^{+\infty} e^{-x}\, dx = \lim_{L\to+\infty} \int_a^L e^{-x}\, dx = \lim_{L\to+\infty} -e^{-x}\Big|_{x=a}^L = \lim_{L\to+\infty} e^{-a} - e^{-L} = e^{-a},$$

mentre
$$\int_{-\infty}^{a} e^{-x}\,dx = \lim_{L\to-\infty}\int_L^a e^{-x}\,dx = \lim_{L\to-\infty} -e^{-x}\Big|_{x=L}^{a} = \lim_{L\to-\infty} e^{-L}-e^{-a} = +\infty.$$
La situazione è la stessa nel caso della funzione $f(x)=xe^{-x}$: infatti,
$$\int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -(x+1)e^{-x} + \text{costante},$$
e dunque
$$\int_a^{+\infty} xe^{-x}\,dx = \lim_{L\to+\infty}\int_a^L e^{-x}\,dx = \lim_{L\to+\infty}(a+1)e^{-a}-(L+1)e^{-L} = (a+1)e^{-a},$$
$$\int_{-\infty}^{a} xe^{-x}\,dx = \lim_{L\to-\infty}\int_L^a e^{-x}\,dx = \lim_{L\to-\infty}(L+1)e^{-L}-(a+1)e^{-a} = +\infty,$$
avendo utilizzato il limite $\lim_{L\to+\infty} Le^{-L}=0$.

In generale, può capitare che la funzione f non sia definita in entrambi gli estremi dell'intervallo, oppure non sia definita in uno o più punti interni, o che si desideri integrare su tutta la retta reale $\mathbb{R}$, o che alcune di queste situazioni appaiano combinate tra loro. Ad esempio, che senso dare all'integrabilità della funzione $f(x)=x^{-\alpha}$ in $(0,+\infty)$? L'idea è sempre la stessa: calcolare l'integrale in un sottointervallo limitato e poi avvicinarsi, tramite un'operazione di limite, all'intervallo desiderato. In questo caso, scegliamo $0<\varepsilon<L<+\infty$ e consideriamo l'integrale definito
$$\int_\varepsilon^L \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}\left(L^{\alpha-1}-\varepsilon^{\alpha-1}\right).$$
Ora si tratta di passare al limite: $\varepsilon\to0^+$ e $L\to+\infty$. Ma... in che ordine dobbiamo passare al limite? Prima ε o prima L? O, in qualche modo, tutti e due contemporaneamente? *Dichiariamo che la funzione è integrabile in senso improprio, se il risultato è indipendente dall'ordine con cui si fanno i limiti.* La maniera più semplice per formalizzare in modo preciso questa definizione è richiedere che i seguenti due limiti esistano separatamente
$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^{x_0}\frac{dx}{x^\alpha} \qquad \text{e} \qquad \lim_{L\to+\infty}\int_{x_0}^L\frac{dx}{x^\alpha},$$
dove x_0 è un qualsiasi numero fissato in $(0,+\infty)$ (ad esempio, $x_0=1$).

Definizione 1.5. *Sia $-\infty\le a<b\le+\infty$ e $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in $[c,d]$ per ogni $[c,d]\subset(a,b)$. La funzione f è* INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO IN (a,b) *se esistono finiti i limiti*
$$\ell_- := \lim_{c\to a^+}\int_c^{x_0} f(x)\,dx \qquad e \qquad \ell_+ := \lim_{d\to b^-}\int_{x_0}^d f(x)\,dx,$$
*per un qualsiasi $x_0\in(a,b)$. In tal caso, l'*INTEGRALE IMPROPRIO DI f IN (a,b) *è dato da*
$$\int_a^b f(x)\,dx = \ell_- + \ell_+.$$

Esempio 1.6. Domandiamoci se la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x \in (-1,1)$$

è integrabile in $(-1,1)$. Come detto, basta scegliere un qualsiasi punto $x_0 \in (-1,1)$ e studiare l'integrabilità di f in $(-1,x_0]$ e $[x_0,1)$. Scegliamo ad esempio $x_0 = 0$,

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c\to -1^+} \int_{c}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c\to -1^+} \arcsin 0 - \arcsin c = -\arcsin(-1) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c\to 1^-} \int_{0}^{c} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c\to 1^-} \arcsin c - \arcsin 0 = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Dato che entrambi gli integrali sono convergenti, la funzione è integrabile in senso improprio e l'integrale vale

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Esempio 1.7. Consideriamo ora l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}}.$$

Esiste o non esiste? Con il cambio di variabile $x = t^2$, si deduce che

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}} &= \int \frac{2dt}{1-t^2} = \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt \\ &= \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + \text{costante} = \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) + \text{costante}\end{aligned}$$

Quindi, scegliendo $x_0 = 1/2$, si ha

$$\lim_{c\to 0^+} \int_c^{1/2} \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}} = \lim_{c\to 0^+} \ln\left(\frac{1+\sqrt{1/2}}{1-\sqrt{1/2}}\right) - \ln\left(\frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

$$\lim_{c\to 1^-} \int_{1/2}^{c} \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}} = \lim_{c\to 1^-} \ln\left(\frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}}\right) - \ln\left(\frac{1+\sqrt{1/2}}{1-\sqrt{1/2}}\right) = +\infty.$$

Dato che il secondo limite è divergente, la funzione non è integrabile in $(0,1)$.

Nel caso di una funzione f definita su $\mathbb{R}$ e integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato, l'integrabilità in senso improprio su $\mathbb{R}$ equivale a dire che esistono finiti i limiti

$$\lim_{L\to-\infty} \int_L^{x_0} f(x)\,dx \qquad \text{e} \qquad \lim_{M\to+\infty} \int_{x_0}^{M} f(x)\,dx,$$

dove x_0 è un qualsiasi numero reale. In caso affermativo, l'integrale di f su $\mathbb{R}$ vale

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{L\to-\infty} \int_L^{x_0} f(x)\,dx + \lim_{M\to+\infty} \int_{x_0}^{M} f(x)\,dx.$$

Ad esempio, consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Scegliendo $x_0 = 0$ e sapendo che una primitiva di $1/(1+x^2)$ è la funzione $\arctan x$,

$$\lim_{L\to-\infty} \int_L^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{L\to-\infty} -\arctan(-L) = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{M\to+\infty} \int_0^M \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{M\to+\infty} \arctan M = \frac{\pi}{2},$$

quindi che la funzione è integrabile su $\mathbb{R}$ e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Ancora più in generale se una funzione f è definita in un insieme A che è unione <u>finita</u> di intervalli disgiunti della forma $(a,b]$, $[a,b)$ o (a,b) con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, per dare senso all'integrabilità in senso improprio, si sceglie il seguente procedimento:

– si suddivide l'insieme A (limitato o illimitato) in un numero <u>finito</u> di <u>intervalli</u>, in ciascuno dei quali il problema dell'integrabilità sia presente o in Definizione 1.3 o in Definizione 1.5;

– se **tutti** gli integrali impropri esistono, la funzione è integrabile in senso improprio nell'insieme di partenza e l'integrale improprio è la somma degli integrali nei singoli intervalli;

– se uno (o più) degli integrali nei sottointervalli non esiste o esiste, ma non è finito, la funzione <u>non</u> è integrabile in senso improprio.

Ad esempio, consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{|x|}} \qquad x \in [-1,1] \setminus \{0\}.$$

L'insieme di definizione va rappresentato come unione di due intervalli disgiunti:

$$[-1,1] \setminus \{0\} = [-1,0) \cup (1,0].$$

Per definizione, f è integrabile in $[-1,1] \setminus \{0\}$ se e solo se lo è in $[-1,0)$ e in $(0,1]$. Dato che valgono

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{2\sqrt{|x|}} = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{2\sqrt{|x|}} = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{2}(-x)^{-1/2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} 1 - \varepsilon^{1/2} = 1$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{|x|}} = \lim_{\delta\to0^+} \int_\delta^1 \frac{dx}{2\sqrt{|x|}} = \lim_{\delta\to0^+} \int_\delta^1 \frac{1}{2}\,x^{-1/2}\,dx = \lim_{\delta\to0^+} 1 - \delta^{1/2} = 1,$$

la funzione è integrabile in senso improprio in $[-1,1] \setminus \{0\}$ e

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{2\sqrt{|x|}} := \int_{-1}^0 \frac{dx}{2\sqrt{|x|}} + \int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{|x|}} = 1 + 1 = 2.$$

Esercizio 1.8. *Dato $\alpha > 0$, in quali insiemi è integrabile la funzione*

$$f(x) = \frac{1}{x|\ln x|^\alpha} \qquad x \in (0,+\infty) \setminus \{1\} \qquad ?$$

Qui i problemi sono tre: i punti $x = 0$ e $x = 1$ in cui la funzione non è definita (e tende a $+\infty$) e il dominio illimitato. Il problema va spezzato quindi nel calcolo di quattro limiti diversi da calcolare:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{1/2} \frac{dx}{x|\ln x|^\alpha}, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{1/2}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x|\ln x|^\alpha},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{x|\ln x|^\alpha}, \qquad \lim_{L\to +\infty} \int_{2}^{L} \frac{dx}{x|\ln x|^\alpha}.$$

La scelta di $1/2$ e 2 è del tutto arbitraria, si sarebbe potuto scegliere un qualsiasi valore in $(0,1)$ e in $(1,+\infty)$, rispettivamente. E' importante sottolineare che il punto di singolarità $x = 1$ comporta lo studio di due integrali impropri, uno a destra di $x = 1$ e l'altro a sinistra.

Integrale in $(0, 1/2)$**.** Nel primo intervallo, ponendo $t = -\ln x$, si ha

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{1/2} \frac{dx}{x|\ln x|^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\ln 2}^{-\ln\varepsilon} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Per $\varepsilon \to 0^+$, $-\ln\varepsilon$ tende a $+\infty$, quindi il limite esiste finito se e solo se $\alpha > 1$ (si riveda l'esempio ad inizio capitolo).

Integrale in $(1/2, 1)$**.** Con la stessa sostituzione $t = -\ln x$ di prima,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{1/2}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x|\ln x|^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\ln(1-\varepsilon)}^{\ln 2} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Questa volta, per $\varepsilon \to 0$, $-\ln(1-\varepsilon)$ tende a zero, quindi il limite esiste finito se e solo se $\alpha < 1$.

Integrale in $(1, 2)$**.** Utilizziamo in questo caso la sostituzione $t = \ln x$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{x|\ln x|^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\ln(1+\varepsilon)}^{2} \frac{dt}{t^\alpha},$$

e dato che $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln(1+\varepsilon) = 0$, il limite esiste finito se e solo se $\alpha < 1$.

Integrale in $(2, +\infty)$**.** Con la stessa sostituzione del caso precedente, si ha

$$\lim_{L\to +\infty} \int_{2}^{L} \frac{dx}{x|\ln x|^\alpha} = \lim_{L\to +\infty} \int_{\ln 2}^{\ln L} \frac{dt}{t^\alpha},$$

e quindi c'è integrabilità se e solo se $\alpha > 1$.

Lo schema in Figura 2 riassume i valori di α e i relativi insiemi di integrabilità in senso improprio. Come si vede, indicando con $x_1 \in (0,1)$ e $x_2 \in (1,+\infty)$ scelti arbitrariamente, se

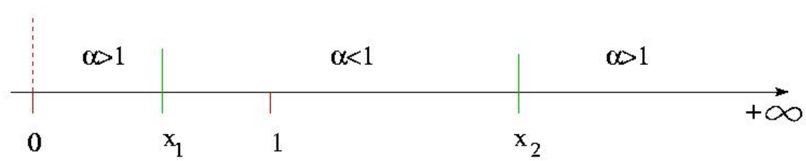

Figura 2.

$0 < \alpha < 1$, la funzione è integrabile in senso improprio in $(0, x_1]$ e in $[x_2, +\infty)$ per ogni scelta di $x_1 \in (0,1)$ e $x_2 \in (1, +\infty)$; invece, se $\alpha > 1$, la funzione è integrabile in senso improprio in $[x_1, x_2]$.

Nel caso in cui la definizione di integrale improprio preveda il calcolo di più di un limite è fondamentale che ogni limite venga calcolato separatamente, suddividendo l'insieme di integrazione in sottointervalli in cui sia necessario un solo limite. Il seguente esempio di procedimento, che non segue le regole di integrazione impropria, è istruttivo:

> il signor Lafcadio, per pura questione di tempo, decise di calcolare l'integrabilità in senso improprio di $1/x$ in $(-1,1) \setminus \{0\}$ senza dividere il problema nell'integrabilità nei due intervalli $(-1,0)$ e $(0,1)$. Fu una scelta azzardata di cui pagò le amare conseguenze. Ecco il suo procedimento:
>
> $$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\ln|x| \big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln|x| \big|_{\varepsilon}^{1} \right)$$
> $$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} -\ln|-\varepsilon| + \ln|\varepsilon| = \lim_{\varepsilon \to 0^+} 0 = 0,$$
>
> da cui concluse che la funzione era integrabile e che il suo integrale era nullo. Ma la verità era un'altra: dato che
>
> $$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \ln|x| \big|_{x=\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} -\ln|\varepsilon| = +\infty,$$
>
> la funzione non è integrabile in senso improprio in $(0,1)$.
>
> In effetti, l'integrazione impropria richiede che i limiti a destra e sinistra del punto di singolarità $x = 0$ siano fatti in maniera indipendente, e cioè come segue:
>
> $$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \lim_{\delta \to 0^+} \int_{\delta}^{1} \frac{dx}{x} = -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \ln|\varepsilon| + \lim_{\delta \to 0^+} \ln|\delta|.$$
>
> L'integrabilità corrisponde all'esistenza di entrambi i limiti separatamente. Lafcadio con la scelta $\delta = \varepsilon$, senza saperlo, stava utilizzando il procedimento con cui si definisce il *valore principale* (nel senso di Cauchy) di un integrale. Oggetto di cui non parleremo, che è comunque ben diverso dall'integrale improprio.

2. Funzioni positive

Nel caso delle serie, se tutti i termini a_k sono positivi, la successione delle somme parziali $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ è una successione non decresente e pertanto o converge o diverge a $+\infty$. Non è possibile che compaiano oscillazioni. Lo stesso avviene parlando di integrali impropri: se la funzione integranda f è non negativa, cioè $f(x) \geq 0$ per ogni x, il limite che compare nella definizione dell'integrale improprio o converge o diverge a $+\infty$. Consideriamo una funzione $f : [a, +\infty)$ integrabile in ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. L'esistenza dell'integrale improprio di f in $[a, +\infty)$ equivale all'esistenza del limite

$$\lim_{L\to+\infty} \Phi(L) \qquad \text{dove} \qquad \Phi(L) = \int_a^L f(x)\,dx. \tag{2.1}$$

Se $f(x) \geq 0$ per ogni $x \geq a$, allora la funzione Φ è non decrescente: infatti

$$f \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Phi(L_2) - \Phi(L_1) = \int_{L_1}^{L_2} f(x)\,dx \geq 0 \qquad \text{se} \quad L_1 < L_2.$$

Pertanto il limite in (2.1) esiste sempre e vale

$$\lim_{L\to+\infty} \Phi(L) = \sup_{x\geq a} \Phi(x).$$

La funzione f è integrabile se e solo se $\sup_{x\geq a} \Phi(x)$ è finito. In questo caso, per esprimere che la funzione f è o non è integrabile in $[a, +\infty)$ basta scrivere, rispettivamente,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty, \qquad \text{oppure} \qquad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty.$$

Inoltre il valore dell'integrale improprio ha un significato geometrico importante: rappresenta l'area della regione di piano <u>non limitata</u>, che è compresa tra il grafico della funzione f, la semiretta $\{x \geq a,\ y = 0\}$ e il segmento di estremi $(a, 0)$ e $(f(a), 0)$. L'esistenza dell'integrale improprio si traduce nel fatto che l'area di questa regione è finita.

Ragionamenti analoghi possono essere fatti nel caso dell'integrale improprio in intervalli limitati.

Esercizio 2.1. *Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ non negativa integrabile in $[a, b]$ per ogni $a < b < +\infty$. Dimostrare che vale l'uguaglianza*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \sup\left\{ \int_c^d f(x)\,dx \ :\ a \leq c < d < +\infty \right\}.$$

Come nel caso delle serie a termini positivi, è possibile introdurre per funzioni positive un *criterio del confronto*, estremamente utile per stabilire se un integrale improprio sia convergente. Il principio è semplice: se il grafico di una funzione positiva giace sopra quello di una funzione non integrabile, anche lei non è integrabile; se invece giace sotto quello di una funzione integrabile è essa stessa integrabile.

Nell'enunciato che segue b può rappresentare sia un numero reale che il simbolo $+\infty$.

Teorema 2.2. *(Criterio del confronto) Siano $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili in $[a, c]$ per ogni $c \in (a, b)$ e tali che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b)$. Allora valgono le implicazioni*

$$\textit{se} \quad \int_a^b f(x)\,dx = +\infty \qquad \Rightarrow \qquad \int_a^b g(x)\,dx = +\infty;$$

$$\textit{se} \quad \int_a^b g(x)\,dx < +\infty \qquad \Rightarrow \qquad \int_a^b f(x)\,dx < +\infty$$

Nel secondo caso, vale anche la stima

$$0 \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Tanto per gradire qualche esempio facile facile. Con tranquillità e sicurezza, affermo ad alta voce:

$$\text{“}\textit{l'integrale improprio}\qquad \int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx \qquad \textit{esiste finito.”}$$

Giustamente un passante che si trovava da quelle parti per puro caso, sente la mia frase e rimane perplesso, vorrebbe una spiegazione. Mi industrio per fornirgliela. Utilizzare direttamente la definizione di integrabilità in senso improprio, richiederebbe il calcolo dell'integrale

$$\int_1^L \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx \qquad L > 1.$$

Ma l'impresa è proibitiva: trovare una primitiva di $|\cos x|/x^2$ non è cosa da poco, probabilmente al limite dell'impossibile. Utilizzando il Teorema 2.2 posso comunque giustificare la mia affermazione, infatti:

$$\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \qquad \forall\, x \geq 1$$

e dato che la funzione $1/x^2$ è tale che

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1 < +\infty,$$

anche la funzione $|\cos x|/x^2$ ha integrale improprio convergente in $[1, +\infty)$. Il signore ha seguito il ragionamento con interesse ed attenzione e si è convinto che effettivamente non avevo detto una cosa tanto per aprire bocca, ma, al contrario, per affermare una indiscutibile verità. Ora è lui a rilanciare: “va bene, ora che sappiamo che l'integrale esiste finito... quanto vale?” Mestamente devo confessare di non essere in grado di fornire una risposta: il criterio di confronto permette infatti di stabilire l'esistenza o meno di integrali impropri, ma non fornisce un metodo di calcolo del loro valore nel caso in cui siano convergenti. Anche qui, la situazione è esattamente la stessa delle serie numeriche, per cui è molto più semplice determinare la convergenza o la divergenza, ma estremamente più complicato calcolarne il valore della somma. L'unica cosa che riesco ad affermare è una stima dall'alto:

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1.$$

Esercizio 2.3. *Stabilire se il seguente integrale improprio converge o diverge*

$$\int_0^1 \frac{1 + e^x}{x}\,dx.$$

L'integrale è chiaramente divergente! Infatti

$$\frac{1 + e^x}{x} \geq \frac{1}{x} \qquad \forall x \in (0, 1],$$

e la funzione $1/x$ non è integrabile in $(0, 1]$.

> A conclusione raggiunta, è auspicabile che qualcuno mi domandi: "come ti è venuto in mente di minorare eliminando il termine e^x?" Oppure "in questo caso la struttura della funzione integranda è particolarmente semplice, ma in situazioni più complicate come ci si può comportare? Quale voce dal cielo può suggerirmi una stima che mi permetta di giungere ad una conclusione?" Vediamo prima una maniera di ragionare in questo caso, per poi enunciare un paio di risultati di confronto asintotico. Il problema nella determinazione dell'integrabilità di $(1 + e^x)/x$ in $(0, 1]$ è legato al fatto che la funzione diverge a $+\infty$ per $x \to 0^+$, tanto vale guardare la funzione in un intorno di quel punto:
>
> $$\frac{1 + e^x}{x} \approx \frac{1 + 1}{x} = \frac{2}{x} \qquad \text{per} \quad x \to 0.$$
>
> La funzione $2/x$ non è integrabile in $(0, 1]$ (l'aver moltiplicato per 2 la funzione $1/x$ non ne cambia il carattere di non integrabilità!). Allora il sospetto è che la funzione non sia integrabile in $(0, 1]$. Che fare? Beh... orientarsi per l'uso della prima parte del Teorema 2.2, cioè cercare una stima dal basso con una funzione il cui integrale improprio sia divergente. Quindi: (i) conservare il termine x a denominatore (l'unico che può causa la divergenza dell'integrale), (ii) eliminare il termine e^x grazie al fatto che è positivo (ho eliminato il termine più "complicato": una funzione trascendente!).

Nel tentativo di spiegazione della soluzione ci sono due aspetti. Uno è "contingente": ogni esercizio/esempio fa storia a sé, ha delle sue peculiarità proprie e solo vedere molti esempi aumenta l'esperienza ed esercita a trovare strade migliori. L'altro aspetto, invece, è generale: l'integrabilità in senso improprio dipende solo dal comportamento della funzione in considerazione in un intorno del punto di singolarità.

Teorema 2.4. *(Criterio del confronto asintotico – I parte) Siano $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili in $[a, c]$ per ogni $c \in (a, b)$ e tali che $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b)$. Allora se vale*

$$\lim_{c \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell > 0,$$

le funzioni f e g o sono entrambe integrabili in senso improprio in $[a, b)$ o sono entrambe non integrabili.

Come nel caso delle serie, se il limite ℓ è zero o se è $+\infty$ valgono solo alcune delle implicazioni...

Teorema 2.5. *(Criterio del confronto asintotico – II parte) Siano $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ integrabili in $[a, c]$ per ogni $c \in (a, b)$ e tali che $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b)$.*

(i) Se

$$\lim_{c \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

allora se f non è integrabile, neppure g lo è; se g è integrabile, anche f lo è.

(ii) Se

$$\lim_{c \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty,$$

allora se g non è integrabile, neppure f lo è; se f è integrabile, anche g lo è.

Passiamo in rassegna qualche esempio.

ESERCIZIO 2.6. *L'integrale improprio*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad \textit{con} \quad k^2 < 1,$$

è convergente?

Dato che la funzione integranda diverge per $x \to 1^+$, bisogna stabilire se esiste finito il limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Per utilizzare uno dei Teoremi di confronto asintotico, dobbiamo confrontare la funzione integranda con una funzione (più semplice) per cui si sappia stabilire l'integrabilità. Procediamo prima in maniera euristica: per $x \approx 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-k^2x^2)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

Quindi per $x \approx 1$, la funzione integranda si comporta (a meno di una costante moltiplicativa non nulla) come la funzione $1/\sqrt{1-x}$. Dato che, con il cambio di variabile $y = 1 - x$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy$$

la funzione $1/\sqrt{1-x}$ è integrabile in $[0, 1)$. Tutto fa sospettare che anche l'integrale di partenza sia anch'esso integrabile. Come dimostrarlo? Semplice, dato che

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 1^-} \frac{1/\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1/\sqrt{1-x}} &= \lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1-k^2x^2)}} \\ &= \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}}\end{aligned}$$

e dato che la funzione $1/\sqrt{1-x}$ è integrabile in $[0, 1)$, grazie al Criterio di confronto, anche la funzione di partenza è integrabile.

ESERCIZIO 2.7. *L'integrale improprio*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx$$

è convergente o è divergente?

Dato che l'integrale è esteso ad un dominio illimitato, bisogna studiare i due limiti

$$\lim_{L \to +\infty} \int_{-L}^0 e^{-x^2}\, dx \qquad \text{e} \qquad \lim_{L \to +\infty} \int_0^L e^{-x^2}\, dx.$$

Con il cambio di variabili $y = -x$
$$\int_{-L}^{0} e^{-x^2}\,dx = \int_0^L e^{-y^2}\,dy,$$
quindi i due limiti sono in realtà lo stesso! Per verificare l'integrabilità di e^{-x^2} in $[0,\infty)$ basta osservare che
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2}}{1/(1+x^2)} = \lim_{x\to+\infty}(1+x^2)e^{-x^2} = \lim_{t\to+\infty}(1+t)e^{-t} = 0.$$
Grazie al Criterio di confronto asintotico II, dato che la funzione $1/(1+x^2)$ è integrabile in $[0,\infty)$, anche la funzione e^{-x^2} lo è.

I criteri di confronto asintotico sono utili quando si conosca il comportamento di un certo numero di "casi campione". Nel caso dell'integrazione impropria molti casi si risolvono ricorrendo alle funzioni del tipo $1/(b-x)^\alpha$ nel caso di integrali in $[a,b)$, del tipo $1/(x-a)^\alpha$ nel caso di integrali in $(a,b]$ e del tipo $1/x^\alpha$ nel caso di integrali in semirette del tipo $[a,+\infty)$ con $a>0$ o del tipo $(-\infty,b]$ con $b<0$. I calcoli fatti negli esempi ad inizio Capitolo mostrano che la *soglia critica* per l'integrabilità di singolarità di tipo potenza è $\alpha = 1$ sia al finito che all'infinito[1]: schematicamente
$$\frac{1}{(b-x)^\alpha} \quad \text{è integrabile in } [a,b) \text{ se e solo se } \alpha < 1;$$
$$\frac{1}{(x-a)^\alpha} \quad \text{è integrabile in } (a,b] \text{ se e solo se } \alpha < 1;$$
$$\frac{1}{x^\alpha} \quad \text{è integrabile in } [a,+\infty) \quad (a>0) \qquad \text{se e solo se } \alpha > 1.$$
$$\frac{1}{(-x)^\alpha} \quad \text{è integrabile in } (-\infty,b] \quad (b<0) \qquad \text{se e solo se } \alpha > 1.$$
Quindi, se si vuole determinare l'integrabilità in $[a,+\infty)$ di una funzione $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ per cui si sia in possesso di un'informazione del tipo
$$\exists\, \ell > 0,\ \alpha > 0 \qquad \text{tale che } \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{1/x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = \ell,$$
è un gioco da ragazzi: se $\alpha > 1$ la funzione è integrabile, altrimenti no. Ad esempio, la funzione
$$\frac{1 + 2\sin(\arctan x) - e^{-x}}{1+x^2}$$
è integrabile in $[0,+\infty)$. Infatti $2 > 1$ e
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{[1+2\sin(\arctan x) - e^{-x}]/(1+x^2)}{1/x^2} &= \lim_{x\to+\infty} x^2\, \frac{1+2\sin(\arctan x) - e^{-x}}{1+x^2} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+2\sin(\arctan x) - e^{-x}}{x^{-2}+1} = 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 > 0.\end{aligned}$$
Analogamente per gli altri casi.

[1] La soglia critica è 1 perché stiamo lavorando con funzioni di <u>una</u> variabile, cioè in dimensione 1.

Per concludere un ultimo criterio che si è già visto in precedenza. Alla luce della definizione di integrazione in senso improprio, possiamo enunciare di nuovo, in modo solo leggermente diverso, il criterio integrale per le serie numeriche (vedi Cap.2).

TEOREMA 2.8. *Sia a_k una successione decrescente e infinitesima. Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione monotona decrescente tale che $f(k) = a_k$ per ogni $k \geq 1$. Allora*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_1^{+\infty} f(x)\, dx < +\infty.$$

Il criterio integrale è particolarmente utile nella direzione che va dall'esistenza dell'integrale improprio alla convergenza della serie. Infatti per gli integrali definiti, grazie al Teorema Fondamentale del Calcolo, c'è una strategia che ne permette il calcolo esplicito in un certo numero di situazioni. Lo stesso non è vero per le serie numeriche. Ad esempio, consideriamo la serie numerica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Si ha

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{L \to +\infty} \int_2^{L} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{L \to +\infty} \int_{\ln 2}^{\ln L} \frac{dy}{y} = +\infty,$$

e quindi anche la serie è divergente (come si vede che $1/x \ln x$ è decrescente?).

La funzione Gamma. Un esempio di funzione definita tramite un integrale improprio è la FUNZIONE GAMMA:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{x-1}\, dy \qquad x > 0.$$

Attenzione a non fare confusione: per ogni fissato $x \geq 0$, l'integrale è nella variabile y.

Per la verifica della convergenza bisogna dividere l'integrale in due parti:

$$\int_0^1 e^{-y} y^{x-1}\, dy \qquad \text{e} \qquad \int_1^{\infty} e^{-y} y^{x-1}\, dy$$

Il primo integrale è improprio se e solo se $x \in (0,1)$. Per dimostrarne la convergenza basta notare che

$$\lim_{y \to 0^+} \frac{e^{-y} y^{x-1}}{1/y^{1-x}} = 1,$$

quindi, dato che

$$\int_0^1 \frac{dy}{y^{1-x}} < +\infty \qquad \forall\, x \in (0,1),$$

la funzione $e^{-y} y^{x-1}$ è integrabile in $(0,1]$.

Per l'altro integrale, si può fare ricorso al Criterio di confronto asintotico II. Dato che, per ogni $x \geq 0$,

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{e^{-y} y^{x-1}}{1/y^2} = \lim_{y \to +\infty} e^{-y} y^{x+1} = 0,$$

l'integrabilità di $1/y^2$ in $[1, +\infty)$ implica quella di $e^{-y} y^{x-1}$.

La funzione Γ gode di una proprietà interessante: grazie ad una integrazione per parti

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-y} y^x \, dy = \lim_{L\to+\infty} \int_0^L e^{-y} y^x \, dy = \lim_{L\to+\infty} \left\{ -e^{-L} L^x + x \int_0^L e^{-y} y^{x-1} \, dy \right\}$$

$$= \lim_{L\to+\infty} -e^{-L + x \ln L} + x \lim_{L\to+\infty} \int_0^L e^{-y} y^{x-1} \, dy = x\,\Gamma(x)$$

In particolare, se si calcola la funzione Γ sui naturali si ottiene

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n-1) = n\,(n-1)\,\Gamma(n-2) = \cdots = n\,(n-1)\,\ldots\,3\cdot 2\Gamma(1) = n!\,\Gamma(1).$$

Dato che

$$\Gamma(1) = \lim_{L\to+\infty} \int_0^L e^{-y} \, dy = \lim_{L\to+\infty} \left(1 - e^{-L}\right) = 1,$$

si ottiene una maniera per esprimere il fattoriale tramite un integrale:

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-y}\, y^n \, dy \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

3. Funzioni di segno qualsiasi

Passiamo ora a considerare funzioni di segno qualsiasi. Ancora una volta, la situazione è simile a quella delle serie, per cui, si ricordi, si è visto che il concetto di convergenza semplice (cioè come limite di somme di n termini) non permette di estendere molte delle proprietà tanto amate per la somma di un numero finito di termini. Iniziamo con un esempio che mostra come, anche nel caso degli integrali impropri, siano presenti tutti i problemi relativi alle serie a segno variabile.

Esempio 3.1. Consideriamo una funzione $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita nel modo seguente. Nell'intervallo $[0,2]$ poniamo

$$f(0) = f(2) = 0 \qquad \text{e} \qquad f(1) = 1,$$

poi definiamo la funzione nei restanti punti, in modo che sia data da un polinomio di primo grado in $[0,1]$ e in $[1,2]$ (ovviamente non lo stesso polinomio!). Nell'intervallo $[2,4]$ poniamo

$$f(2) = f(4) = 0 \qquad \text{e} \qquad f(3) = -\frac{1}{2},$$

e colleghiamo i punti con tratti lineari. In generale, definiamo

$$f(2n) = 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \text{e} \qquad f(2n+1) = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}.$$

Il grafico è in Figura 3. Qual'è il contributo dell'integrale relativo all'intervallo $[2n, 2n+2]$? Dato che la zona delimitata dal grafico della funzione e dall'asse delle x in ciascuno di questi intervalli rappresenta un triangolo con base di lunghezza 2 e altezza pari al valore della funzione nel punto $x = 2n+1$,

$$\int_{2n}^{2n+2} f(x)\, dx = \frac{1}{2}\, 2 \cdot f(2n+1) = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}.$$

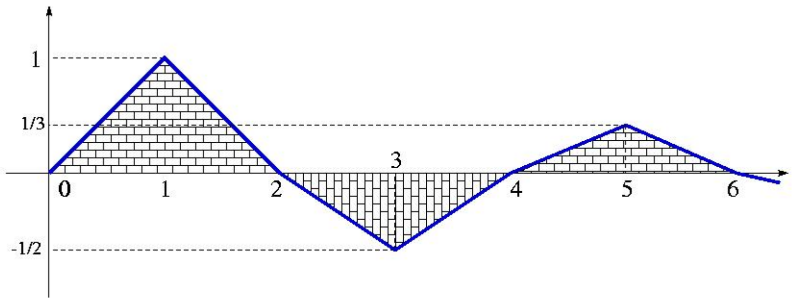

FIGURA 3.

Quindi

$$\int_0^{2n+2} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \int_{2k}^{2k+2} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}. \tag{3.1}$$

Di questa serie sappiamo già tutto: è semplicemente convergente, ma divergente in valore assoluto! La prima delle due affermazioni garantisce che il limite per $n \to +\infty$ dell'integrale di f in $[0, 2n+2]$ esiste, cioè la funzione è integrabile in senso improprio e il valore dell'integrale è dato dalla somma della serie

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}.$$

Il fatto che la serie in (3.1) non sia assolutamente convergente implica la validità del Teorema di Riemann – II parte (vedi Note di Analisi Matematica I, Capitolo 2): riordinando la serie e sommando in ordine diverso è possibile ottenere un qualunque numero reale, o $\pm\infty$, o persino la non convergenza della serie! In termini di integrali, questo significa che se si cambia l'ordine con cui si sommano i vari contributi il valore finale è diverso! Ad esempio, se si sommano prima tutti i contributi positivi (quelli relativi agli intervalli $[2n, 2n+2]$ con n pari) si ottiene il valore $+\infty$. Se si sommano prima tutti quelli negativi, si ottiene $-\infty$.

OSSERVAZIONE 3.2. *Si noti che, nell'esempio precedente, f è integrabile su $A = [0, +\infty)$, tuttavia non è integrabile su $B \subset A$ definito da*

$$B = \{x \in [0, +\infty) \,:\, f(x) \geq 0\},$$

a causa del fatto che la serie armonica è divergente. Questo non contraddice la nostra costruzione dell'integrale improprio, dato che B non è unione finita di intervalli.

La situazione è abbastanza sconfortante: la nostra definizione di integrale improprio ha il difetto evidente di essere troppo rigida: non ci è permesso scegliere l'ordine con cui sommare i vari contributi. Ma ormai ci siamo già temprati grazie allo studio delle serie e sappiamo che il problema in cui siamo incappati discende dal fatto che stiamo lavorando con funzioni a segno variabile. Per funzioni positive, è possibile sommare nell'ordine che si vuole e il risultato non cambia. Seguendo l'esperienza delle serie, introduciamo un nuovo concetto di convergenza per integrali impropri.

DEFINIZIONE 3.3. *Una funzione f ammette* INTEGRALE IMPROPRIO ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE *se la funzione $|f|$ è integrabile in senso improprio.*

Esattamente come nel caso delle serie, se una funzione f ha integrale improprio assolutamente convergente, allora è integrabile anche in senso improprio (omettiamo la dimostrazione). Il viceversa invece non è vero, come dimostrato dall'esempio dato al principio di questa Sezione (invece, nel caso dell'integrale di Riemann, se f è integrabile, anche $|f|$ lo è!).

Inoltre, sempre nel caso di convergenza assoluta, si può calcolare l'integrale seguendo l'ordine che più ci aggrada: il risultato non cambia. Scrivere in maniera precisa quest'affermazione è un po' complicato. Limitiamoci, per semplicità, al caso di una funzione $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ integrabile in $[a, b]$ per ogni $0 < a < b < +\infty$. Se scegliamo $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ successione di intervalli chiusi e limitati tali che

$$I_n \subset I_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \text{e} \qquad \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n = (0, \infty),$$

allora

$$|f| \text{ integrabile in } (0, \infty) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \int_{I_n} f(x)\, dx = \lim_{L\to+\infty} \int_0^L f(x)\, dx =: \int_0^\infty f(x)\, dx.$$

E' importante sottolineare ancora una volta che nel caso in cui la funzione $|f|$ <u>non</u> sia integrabile, lo stesso procedimento non dà luogo allo stesso risultato: successioni di intervalli diverse, danno luogo a limiti diversi. In questo caso, per determinare l'esistenza o la non esistenza dell'integrale in senso improprio, occorre seguire passo passo la definizione che abbiamo dato ad inizio Capitolo.

Integrale di Dirichlet. Un altro esempio di funzione f integrabile in senso improprio, ma non in valore assoluto, è

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad x \in (0, \infty).$$

Qui i problemi sono due: la funzione non è definita in $x = 0$ e il dominio in cui è considerata è illimitato. Il primo dei due problemi è facilmente risolto: dato che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

si può estendere la funzione per continuità, ponendo $f(0) = 1$. Resta il problema del dominio illimitato.

Mostriamo, prima di tutto, che $\dfrac{\sin x}{x}$ *è integrabile in* $[1, \infty)$. Infatti, per ogni $L > 1$,

$$\int_1^L \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_1^L \frac{1}{x} \frac{d}{dx}(-\cos x)\, dx = -\frac{\cos x}{x}\bigg|_1^L - \int_1^L \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$$

L'integrale finale esiste dato che la funzione $\cos x/x^2$ è assolutamente integrabile in $[1,+\infty)$

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$\lim_{L\to+\infty}\int_1^L \frac{\sin x}{x}\,dx = -\cos 1 - \int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Sostanzialmente l'integrale improprio esiste per lo stesso motivo dell'Esempio 3.1: la presenza del termine $\sin x$ provoca un cambio un cambio di segno (con periodicità π), mentre il termine $1/x$ rende i termini infinitesimi all'aumentare di x. Insomma, una struttura simile in tutto e per tutto a quella delle serie a segni alterni soddisfacenti il criterio di Leibniz... Il calcolo esplicito del valore dell'integrale improprio è possibile (il risultato è $\pi/2$), ma richiede un bel po' di lavoro e di conoscenze in più[2].

Mostriamo ora che $|\sin x|/x$ *non è integrabile in* $[1,\infty)$. Per $k\in\mathbb{N}$, consideriamo l'integrale di $|\sin x|/x$ in $[k\pi,(k+1)\pi]$. Per la monotonìa di $1/x$, vale la stima dal basso

$$\begin{aligned}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx &\geq \frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin x|\,dx = \frac{(-1)^k}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\sin x\,dx\\ &= \frac{(-1)^k}{(k+1)\pi}\left[\cos(k\pi)-\cos((k+1)\pi)\right] = \frac{(-1)^k\cdot(-1)^k\cdot 2}{(k+1)\pi} = \frac{2}{(k+1)\pi}\end{aligned}$$

Sommando su k, si ha

$$\int_{\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}.$$

Dato che la serie armonica è divergente, ne segue che il limite è divergente e quindi la funzione $|\sin x|/x$ non è integrabile in $(0,+\infty)$.

(!)Esercizio 3.4. *Sia $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ una funzione decrescente e infinitesima per $x\to+\infty$. Dimostrare che esiste l'integrale improprio*

$$\int_0^\infty f(x)\,\sin x\,dx.$$

Integrali di Fresnel. Un altro esempio di integrali impropri sono dati dagli *integrali di Fresnel*, che emergono nella teoria della diffrazione della luce:

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx.$$

[2]Si consulti, ad esempio, R.Courant, F.John "Introduction to Calculus and Analysis, I", Springer, sez. 8.4c. p.589.

Prendiamo in considerazione l'integrale di $\sin(x^2)$ in $[1, L]$. Utilizzando la sostituzione $t = x^2$ e integrando per parti,

$$\int_1^L \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{L}} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{L}} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\frac{d}{dt}(-\cos t)\,dt$$
$$= -\frac{\cos\sqrt{L}}{2\sqrt{L}} + \frac{\cos 1}{2} - \frac{1}{4}\int_1^{\sqrt{L}} \frac{\cos t}{t^{3/2}}\,dx.$$

L'ultimo integrale è convergente in valore assoluto, dato che

$$\left|\frac{\cos t}{t^{3/2}}\right| \le \frac{1}{t^{3/2}} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

e $1/t^{3/2}$ è integrabile in $[1, +\infty)$. Quindi, passando al limite per $L \to +\infty$, si deduce che la funzione $\sin(x^2)$ è integrabile in $[1, +\infty)$, quindi anche in $[0, +\infty)$, e vale

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx = \int_0^1 \sin(x^2)\,dx + \frac{1}{2}\cos 1 - \frac{1}{4}\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^{3/2}}\,dx.$$

Un fatto eclatante espresso da questo esempio è che *esistono funzioni $f = f(x)$ integrabili in senso improprio in $(0, \infty)$ che <u>non</u> sono infinitesime per $x \to +\infty$!* Nel caso in cui $f : [0, +\infty)$ abbia limite <u>diverso da 0</u> per $x \to +\infty$, la funzione non sarà mai integrabile in $(0, \infty)$ (sai dimostrare questa affermazione?).

(!)Esercizio 3.5. *Dimostrare che esistono funzioni $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ <u>non negative</u> e integrabili in $[0, +\infty)$ che non tendono a zero per $x \to +\infty$. Ne esistono che siano anche funzioni continue?*

CAPITOLO 4

Successioni di funzioni

`Versione del 10 marzo 2003`

"Giunto al limite Cauchy, come sempre puntuale,
a passare non riuscì sotto il segno d'integrale.
Quel problema affatto enorme fu risolto in poche ore,
indossando l'uniforme con l'estremo superiore."
N. Barbecue

1. Tutti al cinema!

Dalla definizione di limite di successioni numeriche seguono un buon numero di grandi successi: la costruzione rigorosa di $\mathbb{R}$ a partire da $\mathbb{Q}$ tramite un'operazione di completamento, l'individuazione del concetto di limite e delle sue principali proprietà. Vale la pena tentare un'analoga avventura nel caso di *successioni di funzioni*. Qui, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si assegna una funzione $f_n = f_n(x)$ (anziché un singolo numero). Se si ha abbastanza fantasia per immaginare un insieme di funzioni come un insieme di punti (ognuno dei quali sia, per l'appunto, una funzione), una successione di funzione è una sequenza di punti, proprio come nel caso delle successioni numeriche. E' chiaro che ognuno di questi punti, a guardarlo bene, ha una struttura più complicata di quella di un singolo e sperduto numero reale...

DEFINIZIONE 1.1. *Una* SUCCESSIONE DI FUNZIONI DEFINITE IN $I \subset \mathbb{R}$ *è una famiglia di funzioni* $f_n : I \to \mathbb{R}$ *indicizzate da* $n \in \mathbb{N}$*:*

$$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

Come recita bene la definizione, tutte le funzioni di una stessa successione sono definite nello stesso insieme I. Usualmente, se l'insieme non è esplicitamente indicato, si sottointende che la successione sia considerata nell'insieme più grande in cui siano definite tutte le funzioni f_n (e cioè nell'intersezione degli insiemi di definizione). Nel seguito, considereremo per semplicità sempre successioni di funzioni il cui insieme di definizione sia un intervallo (limitato o illimitato) o un unione finita di intervalli.[1] Si tratta sì di una

[1]Ogni unione finita di intervalli ha sempre un numero infinito di punti: questa proprietà gioca un ruolo importante nel seguito. Gli amanti della massima generalità provino a tenere a mente questa indicazione...

restrizione, ma non poi così terribile e che comunque permette di sviluppare le peculiarità fondamentali dell'oggetto in questione, quindi... perché non farlo?

Esempi di successioni di funzioni sono

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots \qquad \text{oppure} \qquad 1, e^{-x}, e^{-2x} \dots, e^{-nx}, \dots.$$

Una successione di funzioni può essere data da un'espressione esplicita del tipo $f_n(x)$, ad esempio

$$f_n(x) = \frac{1}{(n+1)^2 + x^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Una maniera per rappresentare una successione di funzioni consiste nel ricorrere al grafico $\Gamma_n = \{(x, f_n(x)) \in I \times \mathbb{R}\}$ di ciascuna funzione f_n. Una successione di funzioni può quindi essere visualizzata come una successione di grafici ordinati in base all'indice n. In qualche modo, è lo stesso che vedere in sequenza i fotogrammi di una pellicola, in ognuno dei quali è rappresentato uno dei grafici delle f_n.

L'esempio più facile è quello di una successione <u>costante in n</u>, cioè della forma

$$f_n(x) = f(x) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I.$$

Per ogni valore di n, la funzione è sempre la stessa (come nel caso di successioni costanti). In questo caso il "fotogramma" proietta sempre la stessa immagine: il grafico di f (Fig.1). Un altro caso semplice è quello di una successione di funzioni ciascuna delle quali sia

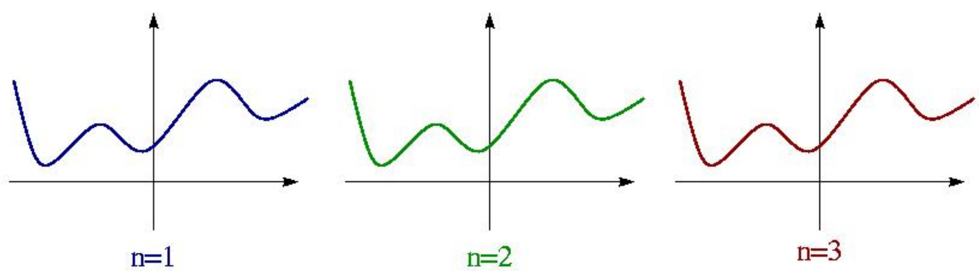

FIGURA 1. Una successione di funzioni del tipo $f_n(x) = f(x)$. Il grafico è sempre lo stesso!

indipendente da x e cioè del tipo:

$$f_n(x) = a_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I.$$

In questo caso, al variare di n il grafico varia, ma ogni singolo fotogramma rappresenta una funzione costante (Fig.2).

In generale, una successione di funzioni si può visualizzare con una sequenza di grafici che variano al variare di n. Ad esempio,

$$f_n(x) = x + n$$

è una successione di rette parallele alla bisettrice $y = x$ collocate sempre più in alto man mano che n aumenta, Fig.3(a). Mentre

$$g_n(x) = nx$$

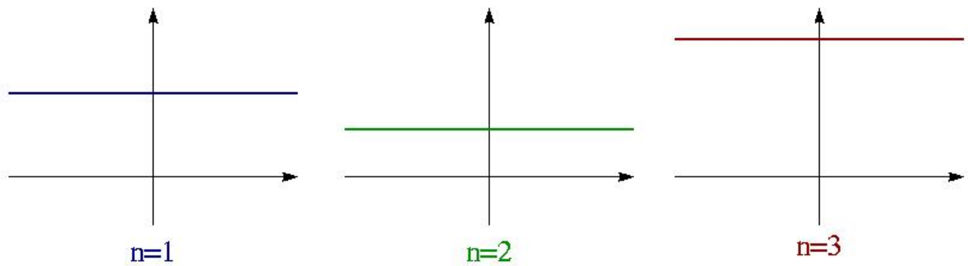

FIGURA 2. Una successione di funzioni del tipo $f_n(x) = a_n$: il grafico varia al variare di n, ma ciascuno di essi è il grafico di una costante.

è una successione di rette tutte passanti per l'origine e di pendenza che aumenta all'aumentare di n, Fig.3(b).

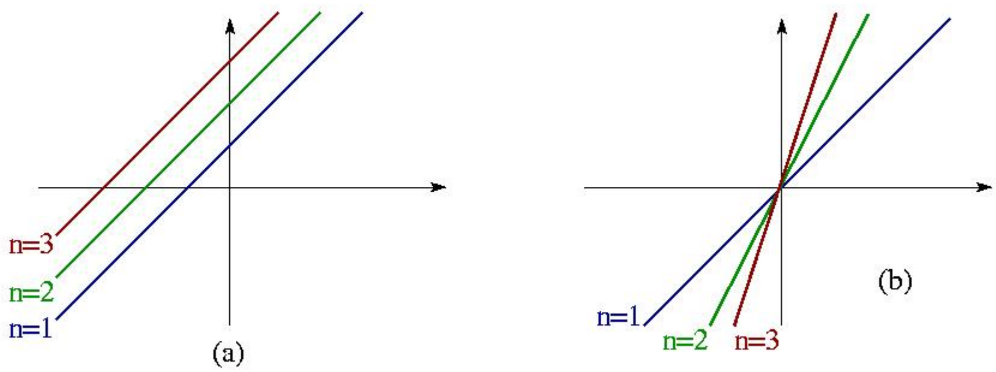

FIGURA 3. (a) La successione $f_n(x) = x + n$; (b) La successione $g_n(x) = nx$.

Con strutture più complicate per l'espressione $f_n(x)$ si vedono film ben più interessanti e imprevedibili di quelli presentati fin qui. Si tratta di una cineteca sterminata, paragonabile solo alla Biblioteca di Babele di J.L.Borges[2]. Una sperimentazione al calcolatore a partire da formule più semplici andando via via verso formule più complicate è certamente un buon esercizio: scegliete un'espressione analitica esplicita dipendente da x e da n, e chiedete al computer o alla calcolatrice, di disegnare il grafico per $n = 0, 1, 2, \ldots$

2. Convergenza puntuale

Una domanda ragionevole da porsi quando ci si trovi a lavorare con una successione di funzioni è "cosa succede per $n \to +\infty$?". Detto in altri termini, che tipo di grafico si vede per valori di n molto grandi? Si tratta esattamente dello stesso tipo di domanda che ci si era posti nel caso delle successioni numeriche. L'unica differenza sta nel fatto che,

[2]In realtà molto più vasta! Vedi

`http://www.bibliotecasvirtuales.com/biblioteca/Borges/bibliotecadebabel.asp` mentre nel caso delle successioni numeriche per ogni n fissato si lavora con un numero reale a_n, nel caso di successioni di funzioni l'oggetto che si considera, per ogni fissato n, è una funzione, per l'appunto. Quindi l'eventuale comportamento limite della successione sarà dato esso stesso da una funzione e non da un numero reale.

La maniera più semplice e ragionevole di introdurre un concetto di convergenza per $\{f_n\}$ è di accorgersi che, se si considera un valore x per volta (cioè si sceglie "x fissato"), la successione $\{f_n(x)\}$ è una successione numerica, oggetto per cui già abbiamo sotto mano una nozione di limite.

Definizione 2.1. *Una successione di funzioni* $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ converge puntualmente in I *se per ogni* $x \in I$, *la successione numerica* $\{f_n(x)\}$ *è convergente. In questo caso, è possibile definire la funzione*

$$f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \qquad x \in I,$$

che si dice limite puntuale di f_n.

L'uso dell'aggettivo "puntuale" (che chiaramente non ha niente a che vedere con la precisione oraria della successione di funzioni) serve a sottolineare che la convergenza che si definisce in questo modo è costruita "punto per punto": si fissa il valore x e si vede se la corrispondente successione dei valori assunti è convergente, così per tutti i valori x nel comune insieme di definizione delle funzioni f_n (Fig.4).

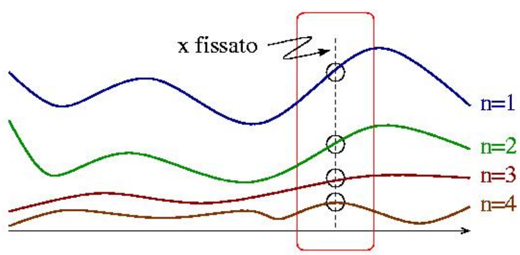

Figura 4.

Se una successione di funzioni converge puntualmente per valori di x in un sottoinsieme J di I si dice che la successione converge puntualmente in J. E' chiaro che se $\{f_n\}$ converge puntualmente in I, allora converge puntualmente anche in J per ogni $J \subset I$. Se non si specifica esplicitamente l'insieme di convergenza di una successione di funzioni si sottointende, di solito, che ci sia convergenza puntuale nell'insieme di definizione della successione di funzioni.

Alcuni esempi (come antipasto).

1. Nel caso di una successione costante $f_n(x) = g(x)$ per ogni n dove g è una funzione assegnata, la conclusione è banale: comunque si fissa x, la successione numerica $\{f_n(x)\}$ è indipendente da n e quindi convergente. Il limite puntuale è chiaramente la funzione g.

2. Altrettanto semplice è l'esempio di una successione di funzioni che sia composta da funzioni costanti, cioè $f_n(x) = a_n$ dove a_n è una successione numerica assegnata. In questo caso, $\{f_n\}$ converge puntualmente se e solo se converge la successione numerica $\{a_n\}$. Se questo è il caso e $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$, allora la $\{f_n\}$ converge puntualmente alla funzione costante $f(x) = \ell$.

3. È possibile dimostrare (vedi Calcolo I, cap.2) che la successione di polinomi

$$f_1(x) = 1 + x, \qquad f_2(x) = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 = 1 + x + \frac{x^2}{4}, \qquad \dots \qquad f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

converge puntualmente e il suo limite è la funzione e^x:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

4. Cosa si può dire della successione di funzioni $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da $f_n(x) = x^n$? Se $x \in [0,1)$, è risaputo che

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x^n = 0.$$

Per $x = 1$, si ha $f_n(1) = 1$ per ogni n e quindi $\lim_{n\to+\infty} x^n = 1$. Perciò la successione $\{f_n\}$ converge puntualmente alla funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da (Fig.5)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1), \\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

L'insieme di definizione I della successione di funzioni in considerazione ha un ruolo

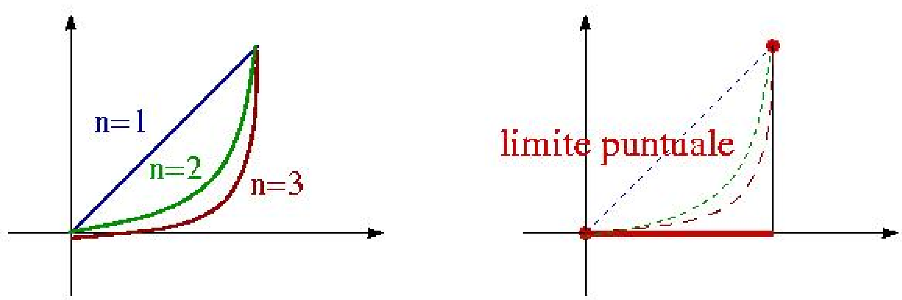

FIGURA 5. La successione dell'esempio $f(x) = x^n$ con $x \in [0,1]$ ed il suo limite puntuale.

fondamentale: considerando insiemi diversi le proprietà di convergenza possono cambiare! Ad esempio, cosa si può dire di $g_n(x) = x^n$ definite per $x \in \mathbb{R}$? Per $|x| < 1$, x^n converge a 0, per $x \le -1$ o per $x > 1$ la successione non è convergente. Quindi $\{g_n\}$ converge puntualmente solo in $(-1,1]$, che è un sottoinsieme del suo insieme di definizione $\mathbb{R}$.

5. Consideriamo la successione di funzioni

$$f_n(x) = \arctan(x + n) \qquad x \in \mathbb{R}$$

Fissato x, $\arctan(x+n)$ tende a $\frac{\pi}{2}$ per $n \to +\infty$, quindi $\{f_n\}$ converge puntualmente alla funzione costante $f(x) = \frac{\pi}{2}$.

In generale, data $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sia $f_n(x) = \phi(x+n)$. Quali proprietà deve avere la funzione ϕ affinché $\{f_n\}$ sia convergente puntualmente? Se esiste finito il limite

$$\lim_{t\to+\infty} \phi(t) = \ell,$$

allora $\{f_n\}$ è convergente a $f \equiv \ell$. Esistono altre scelte di ϕ che determinano successioni $\{f_n\}$ convergenti puntualmente?

6. Per concludere, un altro esempio di successione che non converge puntualmente:

$$f_n(x) = \cos(nx) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Per $x = \pi$, si ha

$$f_n(\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^{n+1}$$

che è, notoriamente, una successione non convergente! La presenza di un valore x_0 per cui la successione numerica $\{f_n(x_0)\}$ non converga basta per poter concludere che la successione di funzioni non converge puntualmente: la convergenza puntuale richiede che le successioni numeriche $f_n(x)$ siano convergenti per ogni scelta di x. Per quali $x \in \mathbb{R}$ converge la successione di funzioni? Qual'è il comportamento dei grafici di f_n all'aumentare di n?

Pregi della convergenza puntuale. Successioni di funzioni possono comparire, ad esempio, nella ricerca di una soluzione ad un problema bislacco, tramite problemi approssimanti per cui si conosca un metodo risolutivo. L'approssimazione al passo n produce la funzione f_n e ci si augura che il limite puntuale delle f_n esista e sia soluzione del problema originale. Capita, perciò, che si conoscano un certo numero di proprietà delle funzioni f_n (positività, monotonia, convessità, limitatezza, continuità, derivabilità, integrabilità), e ci si chieda:

se f_n gode della proprietà $\mathcal{X}$ e f_n converge puntualmente ad f,
è vero che anche la funzione f gode della proprietà $\mathcal{X}$?

La risposta non può che essere "dipende"... da che dipende? Dipende da quale proprietà è $\mathcal{X}$... Per alcune la risposta è "SI", per altre è "NO" (cioè "non è vero in generale" che vuol dire "a volte sì, e a volte no").

PROPOSIZIONE 2.2. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni in $I \subset \mathbb{R}$ convergente puntualmente alla funzione $f : I \to \mathbb{R}$.*

(i) Se tutte le f_n sono non negative, allora anche f è non negativa;

(ii) se tutte le f_n sono non decrescenti (non crescenti), cioè se $f_n(x) \leq f_n(y)$ ($f_n(x) \geq f_n(y)$) per ogni $x \leq y$, $n \in \mathbb{N}$, allora anche f è non decrescente (non crescente);

(iii) se tutte le f_n sono convesse (concave), allora anche la f è convessa (concava).

Dimostrazione della Proposizione 2.2. Diamo la dimostrazione della seconda proprietà, lasciando le altre al lettore desideroso di capire qualcosa da solo.
(ii) Questa proprietà segue direttamente dalle proprietà note per le successioni numeriche: se due successioni a_n e b_n sono convergenti e per ogni n vale $a_n \leq b_n$, allora anche per il limite vale la stessa relazione d'ordine. È utile, però, dimostrare il risultato direttamente per la successione di funzioni f_n. Supponiamo che le funzioni f_n siano non decrescenti, cioè

$$f_n(x) \leq f_n(y) \qquad \forall\, x \leq y, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Sia $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Fissiamo $x < y$. Dall'ipotesi di convergenza puntuale, segue che: considerando x, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $n_\varepsilon(x) \in \mathbb{N}$ tale che[3] $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ per ogni $n \geq n_\varepsilon(x)$. Analogamente, considerando y, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $n_\varepsilon(y) \in \mathbb{N}$ tale che $|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon$ per ogni $n \geq n_\varepsilon(y)$. Per $n \geq \max\{n_\varepsilon(x), n_\varepsilon(y)\}$, le due disequazioni valgono contemporaneamente, quindi, in particolare, vale

$$f(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f_n(y) \leq f(y) + \varepsilon$$

e quindi, guardando solo il primo e l'ultimo termine, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$f(x) \leq f(y) + 2\varepsilon.$$

Dato che ε è arbitrario, deve necessariamente valere $f(x) \leq f(y)$. ∎

Il motivo per cui tutte queste proprietà si conservano passando al limite è che ciascuna di esse prende in considerazione, di volta in volta, un numero finito di punti $x_1, \ldots, x_k$. Ad esempio, f_n non negativa vuol dire che, per ogni fissato n, si ha $f_n(x) \geq 0$. Passando al limite per $n \to +\infty$ (senza muovere la x) si ottiene la conclusione. Nel caso della monotonìa si fissano due valori per volta, x e y, e si passa al limite. L'idea è che, per ciascuno di questo numero finito di punti x_i e per ogni $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un $n_\varepsilon(x_i)$ per cui vale $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$ per ogni $n \geq n_\varepsilon(x_i)$. Scegliendo $n \geq \max\{n_\varepsilon(x_1), \ldots, n_\varepsilon(x_k)\}$, le stime per la distanza di $f_n(x_i)$ da $f(x_i)$ sono vere tutte contemporaneamente e con un minimo di astuzia in più si può giungere alla conclusione.

Lo stesso non si può fare nel caso di una proprietà che coinvolga ogni volta un numero infinito di punti. Infatti supponiamo che si voglia dimostrare una certa proprietà che prende in considerazione $x \in J$ dove $J \subset I$ e J è un insieme infinito (ad esempio, un intervallo). In questo caso, la parola "massimo" dei valori $n_\varepsilon(x)$ va sostituita con "estremo superiore" e può tranquillamente capitare che $\sup\{n_\varepsilon(x) : x \in J\}$ sia $+\infty$ e cioè, in altre parole, *può capitare che non sia possibile determinare n_ε, indipendente da x, per cui $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$ sia vera per ogni $n \geq n_\varepsilon$ e per ogni $x \in J$!* In questo caso, siamo impantanati. Non c'è speranza di proseguire nel ragionamento, a meno che... fermi tutti! Non c'è motivo di precorrere i tempi. Svisceriamo un altro po' la convergenza puntuale e tra poche pagine torneremo sulla questione.

[3] La notazione $n_\varepsilon(x)$, anziché n_ε, serve per sottolineare la dipendenza da x: a valori di x diversi, corrispondono n_ε che possono essere diversi.

Difetti della convergenza puntuale. Come si è detto, per le proprietà che considerano un numero infinito di punti per volta, è difficile che la convergenza puntuale possa essere d'aiuto. In effetti, è possibile costruire esempi per cui le proprietà non valgono per la funzione limite. Passiamo in rassegna le situazioni più significative.

Limitatezza. Esistono successioni di funzioni limitate (cioè ogni singola f_n è limitata) che non convergono puntualmente ad una funzione limitata! L'esempio più semplice è $f_n(x) = n$: ogni funzione è limitata (sono costanti), ma il limite puntuale è sempre e comunque $+\infty$.

Può capitare anche di avere una successione di funzioni limitate, convergenti in ogni punto, ma ad una funzione illimitata. Ad esempio, sia $f_n : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & x \in (0, 1/n) \\ 1/x & x \in [1/n, +\infty) \end{cases}$$

converge puntualmente a

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad x > 0.$$

Quindi, sebbene ciascuna delle funzioni f_n sia limitata, lo stesso non si può dire per la

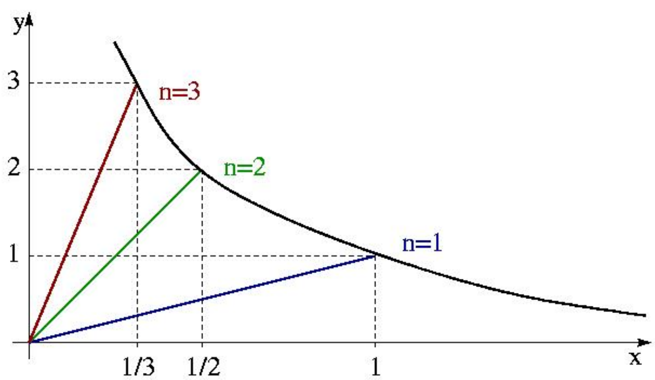

Figura 6.

funzione limite f. Osserviamo che una funzione $g : I \to \mathbb{R}$ è superiormente limitata se $\sup\{g(x) : x \in I\} < +\infty$ e, nel caso in cui l'insieme I non sia finito, si tratta di una proprietà che riguarda un numero infinito di valori x.

Continuità. Anche la continuità, nel caso di limite puntuale, è una proprietà che può essere persa. Un esempio di situazione di questo genere si è già visto: la successione di funzioni $f_n(x) = x^n$ definite per $x \in [0, 1]$ converge puntualmente a

$$f(x) = 0 \qquad x \in [0, 1) \qquad f(1) = 1,$$

che è, evidentemente, una funzione discontinua in $x = 1$.

I punti di discontinuità possono essere anche più di uno e possono comparire anche all'interno del dominio di definizione. Ad esempio, la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}} \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$

converge puntualmente a

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \text{ o } x > 1, \\ 1/2 & x = \pm 1, \\ 1 & -1 < x < 1, \end{cases}$$

che è discontinua in $x = \pm 1$.

Integrabilità. Anche proprietà di integrabilità non sono in generale conservate quando si passa al limite puntuale: esistono successioni di funzioni, ciascuna delle quali sia integrabile, che convergono puntualmente ad una funzione non integrabile! Un esempio? Già la possibile perdita di limitatezza mostra una situazione di "perdita di integrabilità". Si potrebbe pensare che, aggiungendo al concetto di integrale classico quello di integrale improprio, l'integrabilità sia, in una forma più debole, conservata. Ma questo non è il caso: i limiti puntuali di funzioni integrabili possono presentare una quantità di oscillazioni così ampia che l'integrabilità (nel senso di Riemann) può non avere senso. Il tipico esempio di funzione non integrabile, a causa della presenza di un numero assolutamente esagerato di discontinuità, è la funzione di Dirichlet:

$$f(x) = 1 \qquad x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \qquad f(x) = 0 \qquad x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}.$$

Il motivo per cui questa funzione non è integrabile è che è discontinua in ogni punto: il valore della funzione salta continuamente dal valore 0 al valore 1, tanto che è impossibile tracciarne il grafico! E' possibile costruire una successione di funzioni f_n, tutte integrabili, che converga puntualmente alla funzione di Dirichlet? La risposta è "SI". Per costruire le f_n scegliamo un *riordinamento* dei numeri razionali in $[0,1]$, cioè un'applicazione da $\mathbb{N}$ a $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ che sia una corrispondenza biunivoca[4]. Indichiamo con r_n il numero razionale che viene associato al numero naturale n. Definiamo allora la successione di funzioni

$$f_n(x) = 1 \qquad x \in \{r_1, \dots, r_n\} \qquad\qquad f_n(x) = 0 \qquad \text{altrimenti.}$$

Tutte le funzioni f_n sono integrabili, dato che hanno un numero finito di punti di discontinuità: i punti razionali $r_1, \dots, r_n$. Inoltre il limite puntuale delle f_n è la funzione di Dirichlet:

– se $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, esiste $\bar{n}$ per cui $r_{\bar{n}} = x$, quindi, per $n \geq \bar{n}$, si ha $f_n(x) = 1 = f(x)$,

– se $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, $f_n(x) = 0 = f(x)$ per ogni n.

Il fatto che, tramite limite puntuale, si possano raggiungere configurazioni estremamente arzigogolate non deve sorprendere: la richiesta di convergenza punto per punto è estremamente debole dato che non presuppone nessuna particolare forma di collegamento

[4]L'esistenza di un riordinamento è garantita dal fatto che i razionali sono un'*infinità numerabile*. Quelli che non sanno cosa significhi questa affermazione, si fidino sulla parola: è possibile definire una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $[0,1] \cap \mathbb{Q}$.

tra le successioni $\{f_n(x)\}$ relative a valori di x diversi: ogni singola successione deve essere convergente, ma nel modo e nelle forme che più le aggradano, senza cura ed interesse per quello che stiano facendo tutte le altre successioni.

Passaggio del limite sotto segno di integrale. Collegato al punto precedente c'è la questione, estremamente importante, di quando sia possibile "passare il limite sotto il segno di integrale": sia f_n una successione di funzioni convergente puntualmente alla funzione f, sotto quali condizioni è vero che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\,dx = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx \equiv \int_I f(x)\,dx \qquad ?$$

Ossia, detto tramite uno scioglilingua, *il limite degli integrali è l'integrale del limite?* La domanda può sembrare oziosa, ma assolutamente non lo è; esiste un numero pressoché infinito di situazioni in cui è utile sapere se sia lecito scambiare il segno di limite e quello di integrale. Quello che ci si chiede è se l'operazione di integrazione e quella di passaggio il limite commutino (e l'importanza della proprietà commutativa è risaputa in tutto il pianeta ed anche oltre, soprattutto su Saturno, rinomato per i suoi anelli commutativi...).

Nel caso in cui $\{f_n\}$ converga puntualmente ad f e nel caso in cui le funzioni f e f_n per ogni n siano integrabili[5], *non è detto che lo scambio di limite ed integrale sia lecito!* Come sempre nel caso di negazione di una proprietà, basta un esempio: la successione di funzioni (Fig.7)

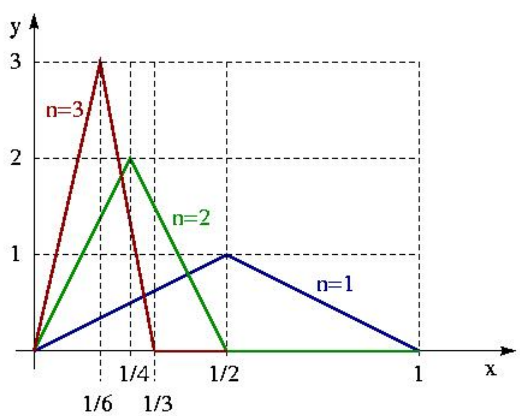

FIGURA 7. Attenzione: nel disegno le unità di misura sull'asse x e sull'asse y sono diverse!

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2 x & 0 \le x < \frac{1}{2n}, \\ -2n^2\left(x - \frac{1}{n}\right) & \frac{1}{2n} \le x < \frac{1}{n}, \\ 0 & \frac{1}{n} \le x \le 1, \end{cases}$$

[5]Come si è detto, la convergenza puntuale di una successione di funzioni integrabili f_n NON garantisce l'integrabilità del limite f. Perciò ci tocca supporre anche l'integrabilità di f per poter dare senso al suo integrale.

converge puntualmente alla funzione $f \equiv 0$. Inoltre

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2} \qquad \forall\, n \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

Difetto di fabbrica della convergenza puntuale. A questo punto è naturale chiedersi come mai la convergenza puntuale, che è onestamente l'oggetto più semplice che si possa definire quando si lavori con successioni di funzioni, sia così fiacca da non saper conservare tante proprietà importanti: limitatezza, continuità, integrabilità.

Per capire il motivo fondamentale di questa debolezza strutturale della convergenza puntuale, torniamo per un attimo alle successioni numeriche. Una successione $\{a_n\}$ converge ad ℓ per $n \to +\infty$ se vale la proprietà

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \qquad \text{tale che} \qquad |a_n - \ell| < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq n_\varepsilon. \tag{2.1}$$

Detto a parole, comunque si scelga una soglia d'errore $\varepsilon > 0$, i valori a_n distano da ℓ meno di ε da un certo n_ε in poi. Fissato $\varepsilon > 0$, la scelta di n_ε non è unica: se un certo n_ε realizza (2.1), ogni $N > n_\varepsilon$ è altrettanto valido; però esiste un n_ε minimo per cui valga (2.1) che, d'ora in poi, indichiamo con N_ε:

$$N_\varepsilon := \min\{n_\varepsilon \in \mathbb{N} \,:\, |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon\}.$$

Nel seguito diremo che N_ε è il valore n_ε–OTTIMALE. La presenza dell'indice ε sta a ricordare la dipendenza da ε: cambiando ε, cambia anche N_ε. Ad esempio, se consideriamo la successione infinitesima $a_n = \frac{1}{n+1}$, allora

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1,$$

quindi $N_\varepsilon = 0$ per $\varepsilon > 1$, e, per $\varepsilon \in (0,1]$, $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ dove $[\,\cdot\,]$ indica la parte intera.

Nel caso di una successione di funzioni $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convergente puntualmente ad una funzione $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vale

$$\forall\, x \in I \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon(x) \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon(x). \tag{2.2}$$

Quindi il valore n_ε–ottimale dipende anche dalla scelta di x:

$$\forall\, x \in I \qquad N_\varepsilon(x) := \min\{n_\varepsilon \in \mathbb{N} \,:\, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon\}.$$

Variando x, in generale, $N_\varepsilon(x)$ può variare. Ad esempio, consideriamo

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx} \qquad x \geq 0,\ n \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

che converge puntualmente alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x > 0. \end{cases}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, determiniamo la funzione $N_\varepsilon(x)$. Per $x = 0$, il conto è facile: $f_n(0) = f(0) = 1$, quindi $|f_n(0) - f(0)| = 0 < \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$. Ne segue che $N_\varepsilon(0) = 1$. Per $x > 0$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1+nx} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon x},$$

perciò, se $\varepsilon > 1$, $N_\varepsilon(x) = 1$, mentre se $\varepsilon \in (0,1]$, allora $N_\varepsilon(x) = \left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon x}\right] + 1$.

Riassumendo

$$\varepsilon > 1 \quad \Rightarrow \quad N_\varepsilon(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \varepsilon \in (0,1] \quad \Rightarrow \quad N_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & x = 0, \\ \left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon x}\right] + 1 & x > 0 \end{cases}$$

Come si vede, N_ε dipende effettivamente dalla scelta di x. Quel che è peggio è che, per ε sufficientemente piccolo, più x si avvicina a zero, più il valore N_ε cresce:

$$\varepsilon \in (0,1) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} N_\varepsilon(x) = \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon x}\right] + 1 = +\infty \quad \Rightarrow \quad \sup_{x\geq 0} N_\varepsilon(x) = +\infty.$$

Questo equivale a dire che, se si fissa una soglia di errore $\varepsilon \in (0,1)$, non è possibile determinare una scelta di n_ε che faccia in modo che la distanza $|f_n(x) - f(x)|$ sia minore di ε *per tutti i valori* $x \in I$ se $n \geq n_\varepsilon$. In altre parole, non è possibile scegliere un valore n_ε *uniforme rispetto ad* x, cioè valido per tutti gli x.

In altri casi, la situazione è differente. Consideriamo

$$f_n(x) = \frac{1}{n+x} \qquad x \geq 0, \qquad n \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

In questo caso il limite puntuale delle f_n è la funzione $f \equiv 0$. Vediamo di determinare l'espressione di $N_\varepsilon(x)$ al variare di x. Procedendo come prima, fissato $\varepsilon > 0$,

$$|f_n(x) - 0| = \frac{1}{n+x} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > \frac{1}{\varepsilon} - x$$

quindi per $x > 1/\varepsilon$ la disequazione è sempre verificata, mentre per $x \leq 1/\varepsilon$ occorre scegliere $n \geq N_\varepsilon(x) = \left[\frac{1}{\varepsilon} - x\right] + 1$. In definitiva

$$N_\varepsilon(x) = \begin{cases} \left[\frac{1}{\varepsilon} - x\right] + 1 & 0 \leq x \leq \frac{1}{\varepsilon}, \\ 1 & x > \frac{1}{\varepsilon} \end{cases}$$

Cosa succede se si calcola l'estremo superiore di $N_\varepsilon(x)$ per $x \geq 0$?

$$\sup_{x\geq 0} N_\varepsilon(x) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$, questo estremo superiore è finito, cioè *in questo caso è possibile scegliere un valore n_ε valido per ogni scelta di x.* Nessuno nega che la differenza tra questi due esempi sia, almeno per chi la vede per la prima volta, una differenza sottile. Nonostante ciò si tratta di una differenza di fondamentale importanza e, proprio per questo, alla proprietà verificata dal secondo esempio si dà un nome ben preciso: *convergenza uniforme.*

Esercizio 2.3. *Sia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Dimostrare che per la successione di funzioni $f_n(x) = g(x)/n$ è possibile determinare un N_ε indipendente da x.*

Una spiegazione casereccia. Per chi abbia tempo e voglia, cerchiamo di capire per quale motivo la convergenza puntuale di funzioni continue non possa in generale garantire la continuità del limite. Consideriamo quindi la solita successione di funzioni f_n, definite in I, convergente puntualmente alla funzione f. La continuità di f in $x_0 \in I$ vuol dire, in soldoni, che i valori $f(x)$ sono vicini al valore $f(x_0)$ a patto che x sia sufficientemente vicino ad x_0. Per quale motivo se f è limite puntuale di funzioni f_n continue questa proprietà dovrebbe valere? L'idea naïf è semplice: $f(x_0)$ è vicino a $f_n(x_0)$ per n sufficientemente grande (grazie alla convergenza puntuale), $f_n(x)$ è vicino a $f_n(x_0)$ per x sufficientemente vicino a x_0 (grazie alla continuità di f_n), infine, $f_n(x)$ è vicino a $f(x)$ per n sufficientemente grande (di nuovo grazie alla convergenza puntuale), Fig.8 (a sinistra). In conclusione: $f(x)$ è vicino a $f(x_0)$, cioè f è continua! I controesempi che abbiamo

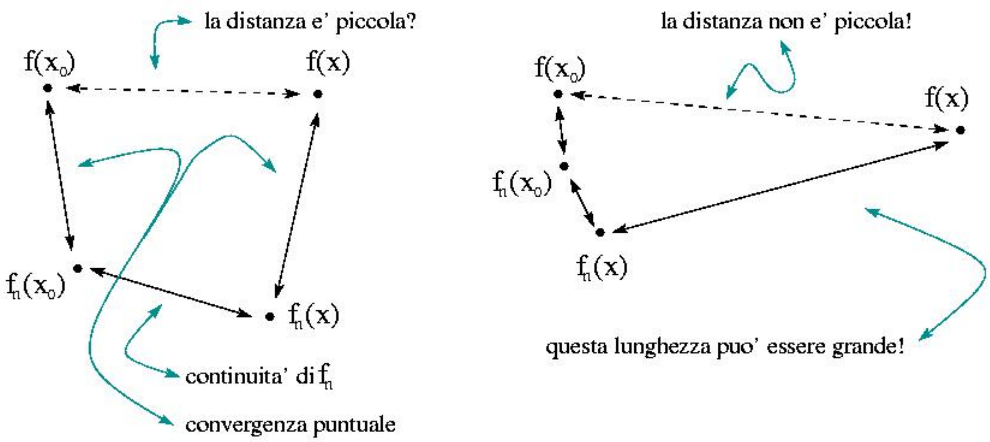

FIGURA 8. A sinistra, uno schema dell'idea naïf; a destra, quello che può realmente succedere!

dati in *Continuità* mostrano che in questo ragionamento c'è qualche baco: qualcosa è sbagliato. Ma cosa? Proviamo a seguire più da vicino il procedimento. Per dimostrare che $f(x)$ è vicino a $f(x_0)$ vogliamo, sostanzialmente, avvalerci delle disuguaglianza triangolare: la distanza di $f(x_0)$ da $f(x)$ si controlla con la somma delle distanze di $f(x_0)$ da $f_n(x_0)$, di $f_n(x_0)$ da $f_n(x)$ e di $f_n(x)$ da $f_n(x_0)$:

$$|f(x_0) - f(x)| \leq |f(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, per prima cosa scegliamo n in modo che $|f(x_0) - f_n(x_0)|$ sia minore di ε, cioè scegliamo $n \geq N_\varepsilon(x_0)$. Ottimo. Ora sfruttiamo la continuità di f_n per affermare che esiste $\delta > 0$ (che dipende dalla scelta di n) per cui anche la distanza $|f_n(x_0) - f_n(x)|$ è minore di ε. E fin qui non ci piove. Ora ci troviamo a dover stabilire se anche il termine $|f_n(x) - f(x)|$ è piccolo, minore di $\varepsilon > 0$, ma questo è vero solo se $n \geq N_\varepsilon(x)$. Quindi la scelta di n non può essere fatta solo in dipendenza di x_0 (che suggerirebbe $n \geq N_\varepsilon(x_0)$), ma anche in dipendenza di <u>tutti</u> i valori x sufficientemente vicini ad x_0 (che indica $n \geq N_\varepsilon(x)$ per ogni valore x vicino ad x_0). In altre parole si vorrebbe trovare un valore N <u>indipendente</u> da x, per lo meno in un intorno di x_0, che garantisca che la distanza $|f_n(x) - f(x)|$ sia minore di ε... Ma come si è visto la convergenza puntuale non garantisce l'esistenza di un tale N e quindi siamo fritti. In generale, la distanza $|f_n(x) - f(x)|$ può anche essere molto grande (Fig.8, a destra). Il ragionamento naïf crolla e noi rischiamo di finire sotto le sue macerie se non ci spostiamo rapidamente fino al prossimo paragrafo.

3. Convergenza uniforme

Dato che la convergenza puntuale è difettosa, occorre introdurre un nuovo concetto di convergenza che garantisca la conservazione di continuità, limitatezza, integrabilità e che, magari, permetta di passare il limite sotto segno di integrale.

DEFINIZIONE 3.1. *Una successione di funzioni* $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CONVERGE UNIFORMEMENTE ALLA FUNZIONE $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *se*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \qquad \textit{tale che} \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq n_\varepsilon \quad \forall\, x \in I. \tag{3.1}$$

La funzione f *è il* LIMITE UNIFORME DI f_n.

Confrontando con (2.2), che esprime la convergenza puntuale, si riconosce che l'unica differenza sta nella collocazione della frase "$\forall\, x \in I$". L'aver spostato alla fine il quantificatore universale $\forall$ per il valore x indica che *nella convergenza uniforme si richiede, per ogni* $\varepsilon > 0$ *fissato, l'esistenza di un* n_ε *indipendente da* $x \in I$, cioè valido per ogni scelta di x. Dal paragrafo precedente si deduce che, delle due successioni

$$\frac{1}{1+nx} \quad (x \geq 0) \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{n+x} \quad (x \geq 0),$$

la prima è convergente puntualmente e non uniformemente, mentre la seconda è convergente puntualmente e uniformemente.

OSSERVAZIONE 3.2. È evidente che

$$\text{convergenza uniforme} \qquad \Rightarrow \qquad \text{convergenza puntuale}$$

Infatti, per la convergenza puntuale si richiede semplicemente che, per ogni $\varepsilon > 0$, esista un valore n_ε per cui valga la stima $|f_n(x) - f(x)|$ per ogni $n \geq n_\varepsilon$, cosa che è garantita nel caso di convergenza uniforme. La convergenza puntuale non è affatto interessata alla dipendenza o indipendenza di n_ε da x: basta che, per ogni x, ce ne sia almeno uno "buono". Invece, l'implicazione inversa è falsa: esistono successioni convergenti puntualmente, ma non uniformemente. Basta scorrere all'indietro qualche riga di queste Note...

OSSERVAZIONE 3.3. Esattamente come nel caso della convergenza puntuale, una successione di funzioni definita in I può convergere uniformemente in un sottoinsieme $J \subset I$. L'affermazione significa semplicemente che la successione delle restrizioni $f_n\big|_J$ converge uniformemente (in J). Se una successione di funzioni converge uniformemente in I, allora converge uniformemente in ogni suo sottoinsieme $J \subset I$. Usualmente, se non è specificato l'insieme in cui c'è convergenza uniforme, si intende che ci sia convergenza in tutto l'insieme di definizione della successione.

Il problema principale, ora, è come stabilire se una successione converga uniformemente oppure no. In linea di principio si potrebbe procedere come si è visto nel paragrafo precedente: data $f_n : I \to \mathbb{R}$,

– stabilire se f_n converge puntualmente ad una funzione f (condizione necessaria);

– in corrispondenza di ogni x, per ogni $\varepsilon > 0$, determinare il valore N ottimale $N_\varepsilon(x)$;

– dato $\varepsilon > 0$, vedere se esiste $n_\varepsilon \geq N_\varepsilon(x)$ per ogni x, cioè stabilire se $\sup\limits_{x \in I} N_\varepsilon(x)$ è finito.

La seccatura è che il calcolo di $N_\varepsilon(x)$ può essere estremamente complicato e ciò renderebbe l'uso della convergenza uniforme una tortura vera e propria. Occorre un metodo, una strada che sia operativamente più semplice...

Teorema 3.4. *Condizione necessaria e sufficiente affinché la successione di funzioni $f_n : I \to \mathbb{R}$ converga uniformemente in I a $f : I \to \mathbb{R}$ è che la successione numerica*

$$d_n := \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$$

sia infinitesima per $n \to +\infty$.

Osservazione 3.5. Il Teorema 3.4 mostra che è possibile scegliere come definizione di convergenza uniforme, anziché quella data in Definizione 3.1, la seguente: *una successione di funzioni $f_n : I \to \mathbb{R}$ si dice convergere uniformemente in I a $f : I \to \mathbb{R}$ se*

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Prima di passare alla dimostrazione, proviamo a sperimentare il criterio dato dal Teorema 3.4 per le successioni

$$\frac{1}{1 + nx} \quad (x \geq 0) \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{n + x} \quad (x \geq 0).$$

Partiamo prima dalla seconda successione:

$$f_n(x) = \frac{1}{n + x} \qquad \text{e} \qquad f(x) = 0 \qquad (x \geq 0).$$

In questo caso,

$$d_n := \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, +\infty)} \frac{1}{n + x} = \frac{1}{n}.$$

Dato che $1/n$ è infinitesima, la successione f_n converge uniformemente.

Per l'altra successione,

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx} \qquad \text{e} \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x > 0. \end{cases}$$

e quindi

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{1+nx} & x > 0, \end{cases}$$

da cui segue

$$d_n := \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(0,+\infty)} \frac{1}{1+nx} = 1$$

che non è infinitesima: la successione non converge uniformemente.

Non è detto che, nella vita, i conti siano sempre così semplici come nei due casi appena visti, ma, comunque, la strategia suggerita dal Teorema 3.4 è di gran lunga più rapida della verifica diretta della convergenza uniforme.

Dimostrazione del Teorema 3.4. La dimostrazione è conseguenza diretta del fatto che, per ogni $r > 0$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq r \qquad \forall\, x \in I \qquad \Longleftrightarrow \qquad d_n := \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \leq r.$$

Supponendo la convergenza uniforme, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste n_ε per cui la relazione di sinistra è vera per $r = \varepsilon/2$ e $n \geq n_e$, e quindi d_n è infinitesima. Viceversa, se d_n è infinitesima, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste n_ε per cui la relazione di destra è vera per $r = \varepsilon/2$ e $n \geq n_e$, e perciò la convergenza è uniforme. ∎

Il Teorema 3.4 permette di dare un'interpretazione geometrica semplice della convergenza uniforme: se vale

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

rispolverando la definizione di limite di successione numerica, questo vuol dire che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ per cui

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq n_\varepsilon,$$

e cioè

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, x \in I, \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon,$$

ossia

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon \qquad \forall\, x \in I, \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon.$$

Quest'ultima condizione indica che il grafico delle funzioni f_n per $n \geq n_\varepsilon$ è imprigionato tra i grafici della funzioni $f - \varepsilon$ e $f + \varepsilon$, che possono essere ottenuti traslando il grafico di f verso il basso e verso l'alto, rispettivamente, di ε (vd. Fig. 9). Nel caso in cui non ci sia convergenza uniforme, questa proprietà è violata per ε sufficientemente piccoli. Si pensi, ad esempio, alla successione $f(x) = x^n$ per $x \in [0, 1]$ il cui limite puntuale è

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

Per $x \in [0, 1)$, richiedere $f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$ significa domandarsi:

$$-\varepsilon < x^n < \varepsilon \qquad x \in [0, 1) \qquad ?$$

È un soffio convincersi che, per $\varepsilon < 1$, questa condizione non è verificata per x sufficientemente vicino a 1 (dato che $\lim\limits_{x\to1^-} x^n = 1$).

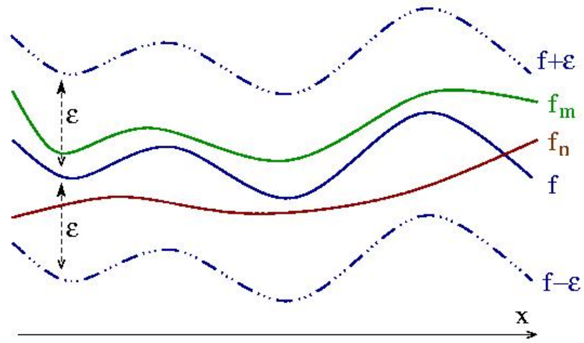

FIGURA 9. I grafici di f_n e f_m sono intrappolati tra quelli di $f - \varepsilon$ e $f + \varepsilon$.

ESERCIZIO 3.6. *Determinare il limite puntuale delle successioni di funzioni*

$$f_n(x) = e^{-nx} \quad x \geq 0, \qquad g_n(x) = nxe^{-n^2x} \quad x \geq 0, \qquad h_n(x) = n^\alpha xe^{-n^2x} \quad x \geq 0,\ \alpha > 0,$$

e stabilire se si tratta di convergenza uniforme.

SOLUZIONE. Partiamo dalla prima: si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} e^{-nx} = f(x) := \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x > 0. \end{cases}$$

Per stabilire se la convergenza è uniforme, consideriamo la funzione $|f_n(x) - f(x)|$

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ e^{-nx} & x > 0. \end{cases}$$

Quindi

$$\sup_{x\geq 0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x>0} e^{-nx} = \lim_{x\to 0^+} e^{-nx} = 1,$$

che non tende a zero per $n \to +\infty$. Perciò la convergenza non è uniforme.

Consideriamo la seconda successione. In questo caso

$$g(x) := \lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \lim_{n\to+\infty} nxe^{-n^2x} = 0 \qquad \forall x \geq 0.$$

Per la convergenza uniforme, bisogna determinare

$$\sup_{x\geq 0} |g_n(x) - g(x)| = \sup_{x\geq 0} nxe^{-n^2x}.$$

Studiamo quindi la funzione $\phi(x) = nxe^{-n^2x}$:

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(+\infty) = 0, \quad \phi'(x) = n(1 - n^2x)e^{-n^2x}.$$

Perciò la funzione ϕ è crescente in $[0, \frac{1}{n^2}]$ e decrescente in $[\frac{1}{n^2}, +\infty)$ e si ha

$$\sup_{x\geq 0} |g_n(x) - g(x)| = \sup_{x\geq 0} \phi(x) = \phi\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{en}$$

Dato che $\frac{1}{en}$ è infinitesima per $n \to +\infty$, la convergenza è unforme. Punto e a capo.

Resta l'ultima successione. Qui compare anche un parametro $\alpha > 0$ e occorrerà distinguere situazioni differenti al variare di α. Il limite puntuale è facile:

$$h(x) := \lim_{n\to+\infty} h_n(x) = \lim_{n\to+\infty} n^\alpha xe^{-n^2x} = 0 \qquad \forall\, x \geq 0.$$

Per studiare la convergenza uniforme bisogna determinare l'estremo superiore della funzione $\psi_\alpha(x)$ definita da

$$\psi_\alpha(x) = |h_n(x) - h(x)| = n^\alpha x e^{-n^2 x}.$$

Valgono

$$\psi_\alpha(0) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \psi_\alpha(x) = 0, \quad \psi'_\alpha(x) = n^\alpha(1 - n^2 x)e^{-n^2 x},$$

che indica che ψ_α ha le stesse proprietà di monotonia della funzione ϕ del caso precedente. Perciò

$$\sup_{x\geq 0} |h_n(x) - h(x)| = \sup_{x\geq 0} \psi_\alpha(x) = \psi_\alpha\left(\frac{1}{n^2}\right) = n^{\alpha-2}\, e^{-1}.$$

Condizione necessaria e suffciente per la convergenza uniforme è che questa successione numerica sia infinitesima, quindi possiamo concludere che la successione di funzioni h_n convergono uniformemente se e solo se $\alpha < 2$ (l'esponente di n deve essere negativo!).

Esercizio 3.7. *Sia f_n la successione di funzioni definita da*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & n \leq x < n+1, \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Determinarne il limite puntuale e stabilire se la convergenza è uniforme in $\mathbb{R}$.

Esercizio 3.8. *Per $n \in \mathbb{N}^+$, studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ rappresentata in Figura 10.*

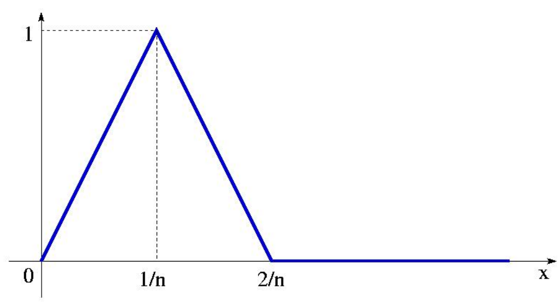

Figura 10. Il grafico di f_n dell'Esercizio 3.8.

Proprietà della convergenza uniforme. Il motivo per cui si è introdotta la convergenza uniforme è di sopperire alle carenze della convergenza puntuale. Si vorrebbe che, sotto l'ipotesi di convergenza più forte (uniforme anziché puntuale), la funzione limite erediti dalla successione di funzioni di cui è limite qualche proprietà in più: limitatezza, continuità, integrabilità. E funziona!

Teorema 3.9. *Sia $f_n : I \to \mathbb{R}$ convergente uniformemente a $f : I \to \mathbb{R}$.*
(i) Se tutte le f_n sono limitate, allora anche la funzione f è limitata. Inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} f_n(x) = \sup_{x\in I} f(x) \qquad e \qquad \lim_{n\to+\infty} \inf_{x\in I} f_n(x) = \inf_{x\in I} f(x).$$

(ii) Se tutte le f_n sono continue in I, allora anche la funzione f è continua in I.

(iii) Se $I = [a, b]$ e le f_n sono integrabili in I, allora anche f è integrabile in I. Inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{3.2}$$

Osservazione 3.10. Tutte le proprietà del Teorema 3.9 indicano che la convergenza uniforme garantisce la chiusura rispetto a certe operazioni. Inoltre esprimono la possibilità di commutare il limite con altri operatori $(\sup, \inf, \lim, \int)$

$$\begin{array}{lccl}
(i) & \longrightarrow & \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} f_n(x) & = \displaystyle\sup_{x\in I} \lim_{n\to+\infty} f_n(x); \\
(ii) & \longrightarrow & \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) & = \displaystyle\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to+\infty} f_n(x); \\
(iii) & \longrightarrow & \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx & = \displaystyle\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\, dx.
\end{array}$$

L'ultima di queste formule esprime il "passaggio al limite sotto segno di integrale".

Osservazione 3.11. La proprietà (ii) del Teorema 3.9 può essere letta anche al contrario: se una successione di funzioni continue converge puntualmente ad una funzione discontinua, la convergenza non può essere uniforme:

$$f_n \text{ continue },\ \lim_{n\to+\infty} f_n = f \text{ discontinua} \quad \Rightarrow \quad \text{la convergenza non è uniforme.}$$

Ricordate il caso della successione $f_n(x) = e^{-nx}$ per $x \geq 0$? Anziché dimostrare tramite il calcolo di $\sup |f_n(x) - f(x)|$ che la convergenza non è uniforme, alla stessa conclusione si può arrivare semplicemente osservando che il limite puntuale è dato da

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x > 0. \end{cases}$$

che è una funzione discontinua: la convergenza non può essere uniforme.

Si noti che, invece, non è vero che se una successione di funzioni continue converge puntualmente ad una funzione continua, allora la convergenza è uniforme. Per convincersi di questa affermazione basta tornare indietro e riguardare la successione di funzioni $h_n(x) = n^\alpha x e^{-n^2 x}$ per $x \geq 0$ scegliendo $\alpha \geq 2$, oppure si può pensare alla successione di funzioni definita dal grafico in Figura 11. Non solo: è possibile che la successione f_n sia discontinua e converga uniformemente ad una funzione continua...

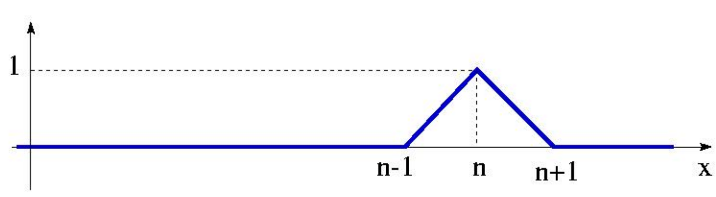

Figura 11. Una successione di funzioni continue che converge non uniformemente ad una funzione continua.

Dimostrazione del Teorema 3.9. (i) Dalla diseguaglianza triangolare e dall'ipotesi di convergenza uniforme segue che, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε per cui

$$|f(x)| \leq |f_n(x)| + |f(x) - f_n(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| + \varepsilon \qquad \forall\, n \geq n_\varepsilon,$$

che mostra che la funzione f è limitata.

Per dimostrare che il limite degli estremi superiori (inferiori) è l'estremo superiore (inferiore) del limite, notiamo che

$$f(x) \leq f(x) - f_n(x) + f_n(x) \leq |f(x) - f_n(x)| + f_n(x) \leq d_n + f_n(x)$$

dove $d_n = \sup_{x\in I} |f(x) - f_n(x)|$. Passando all'estremo superiore nel primo e nell'ultimo termine

$$\sup_{x\in I} f(x) \leq d_n + \sup_{x\in I} f_n(x).$$

A partire da $f_n(x) \leq f_n(x) - f(x) + f(x)$, si deduce che $\sup\limits_{x\in I} f_n(x) \leq d_n + \sup_{x\in I} f(x)$ e quindi

$$\Big|\sup_{x\in I} f(x) - \sup_{x\in I} f_n(x)\Big| \leq d_n. \tag{3.3}$$

Passando agli estremi inferiori si ottiene

$$\Big|\inf_{x\in I} f(x) - \inf_{x\in I} f_n(x)\Big| \leq d_n. \tag{3.4}$$

Se la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente ad f, allora d_n è infinitesima e quindi vale la conclusione.

(ii) Per dimostrare che f è continua in $x_0 \in I$ stimiamo l'incremento $|f(x) - f(x_0)|$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f_n(x) - f_n(x_0)| + 2 \sup_{y\in I} |f(y) - f_n(y)| \end{aligned} \tag{3.5}$$

grazie alla disuguaglianza triangolare. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste n_ε tale che, per ogni $n \geq n_\varepsilon$, vale

$$d_n = \sup_{y\in I} |f(y) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Fissiamo un $n \geq n_e$. Dato che f_n è continua in x_0, è possibile determinare $\delta > 0$ per cui

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall\, |x - x_0| < \delta.$$

Quindi, da (3.5) si deduce che

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon \qquad \forall\, |x - x_0| < \delta.$$

(iii) La parte più complicata della dimostrazione sta nel far vedere che il limite uniforme di funzioni integrabili è esso stesso integrabile[6]. Supponiamo che sia vero e mostriamo la

[6] Se si suppone *in più* che le funzioni f_n siano continue, la conclusione è vera grazie al punto (ii) e grazie al fatto che le funzioni continue sono integrabili. Senza l'ipotesi di continuità, invece, l'integrabilità del limite è tutta da dimostrare.

validità di (3.2). Dato che, per ipotesi, $d_n = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$ è infinitesima e vale

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]\,dx\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \le (b-a)d_n,$$

la successione numerica $\int_a^b f_n(x)\,dx$ converge a $\int_a^b f(x)\,dx$ per $n \to +\infty$, cioè vale (3.2).

Supponiamo ora f_n integrabili e dimostriamo che f, loro limite uniforme, è integrabile. Data una partizione $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b\}$, siano

$$\alpha_i^n = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f_n(x), \quad \beta_i^n = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f_n(x), \qquad \text{e} \qquad \alpha_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad \beta_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x).$$

Per dimostrare l'integrabilità di f, basta mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione P per cui vale

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{i=1}^{k} (\beta_i - \alpha_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

Ragionando in modo simile alla dimostrazione della continuità, aggiungiamo e sottraiamo i termini opportuni e utilizziamo la disuguaglianza triangolare per ottenere

$$S(f,P) - s(f,P) \le |S(f,P) - S(f_n,P)| + [S(f_n,P) - s(f_n,P)] + |s(f_n,P) - s(f,P)|\,.$$

Il primo dei tre termini a destra, ricordando anche (3.3), è stimato da

$$\begin{aligned} |S(f,P) - S(f_n,P)| &\le \sum_{i=1}^{k} |\beta_i - \beta_i^k|(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{k} \sup_{y\in[x_{i-1},x_i]} |f_n(y) - f(y)|(x_i - x_{i-1}) \\ &\le \sum_{i=1}^{k} \sup_{y\in[a,b]} |f_n(y) - f(y)|(x_i - x_{i-1}) = (b-a)d_n. \end{aligned}$$

Analogamente per il termine $|s(f_n,P) - s(f,P)|$, grazie a (3.4),

$$|s(f_n,P) - s(f_n,P)| \le (b-a)d_n.$$

In definitiva, per ogni partizione P e per ogni n vale

$$S(f,P) - s(f,P) \le 2(b-a)d_n + [S(f_n,P) - s(f_n,P)]\,.$$

Dato $\varepsilon > 0$, sia $\bar n$ tale che $2(b-a)d_{\bar n} < \varepsilon/2$. Dato che $f_{\bar n}$ è integrabile, è possibile determinare una partizione $\bar P$ per cui $S(f_{\bar n}, \bar P) - s(f_{\bar n}, \bar P) < \varepsilon/2$, e quindi

$$S(f,P) - s(f,P) \le 2(b-a)d_{\bar n} + \left[S(f_{\bar n}, \bar P) - s(f_{\bar n}, \bar P)\right] < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

che garantisce l'integrabilità di f. ∎

Esercizio 3.12. *Studiare la convergenza della successione di funzioni*

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Calcoliamo prima di tutto il limite puntuale. Grazie alla continuità di $\sqrt{\cdot}$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

La convergenza è uniforme? Per rispondere alla domanda calcoliamo

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}-|x|\right| = \sup_{x\geq 0}\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}-x = \sup_{x\geq 0}\frac{1}{n\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}+x\right)}.$$

Dato che la funzione $\frac{1}{n\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}+x\right)}$ è decrescente, si ha

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}-|x|\right| = \frac{1}{n\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

quindi la convergenza è uniforme.

4. Altre questioni connesse alla convergenza uniforme.

L'utilità di saper stimare. Per stabilire se una successione converge uniformemente oppure no, si è detto che lo strumento fondamentale è il Teorema 3.4: data $\{f_n\}$,

(i) si determina il limite puntuale f (qualora la successione non converga puntualmente, non può nemmeno convergere uniformemente!);

(ii) si considera la funzione $\phi_n(x) := |f_n(x) - f(x)|$ e se ne calcola l'estremo superiore

$$d_n := \sup_{x\in I}\phi_n(x);$$

(iii) si passa al limite per $n \to +\infty$: se il limite è zero la convergenza è uniforme, se non esiste o esiste e non è zero, la convergenza non è uniforme.

Ci sono vari passi di questa strategia che possono riservare brutte sorprese. Già nel primo, non è detto che si riesca a determinare l'esistenza o l'espressione del limite puntuale f. Supponiamo però che si sia superato l'ostacolo (i). Anche la determinazione dell'estremo superiore della funzione ϕ_n può essere complicata. È importante ricordarsi che, in realtà, non siamo interessati a conoscere esattamente il valore di $d_n = \sup\phi_n$, ma solamente a sapere se questa successione sia o non sia infinitesima. Quindi, se siamo in grado di determinare una stima dall'alto per $d_n = \sup\phi_n$ con una successione c_n infinitesima, dato che $d_n \geq 0$, anche la successione d_n è infinitesima, ossia la convergenza è uniforme! O se, al contrario, siamo in grado di stabilire (con una stima dal basso) che l'estremo superiore non tende a zero, allora la convergenza non può essere uniforme.

Vediamo un esempio: sia

$$f_n(x) = \frac{\sin(n^2x^2+1)+n}{n^2+x^2} \qquad x\in\mathbb{R},\ n\geq 1.$$

Dato che il termine $\sin(n^2x^2+1)$ è limitato non è difficile rendersi conto della validità di

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(n^2x^2+1)+n}{n^2+x^2} = 0 \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

Per stabilire se la convergenza è uniforme occorre considerare

$$d_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|\sin(n^2x^2+1)+n|}{n^2+x^2} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{\sin(n^2x^2+1)+n}{n^2+x^2},$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzato che $n \geq 1$. Non augurerei al peggiore dei miei nemici di dover determinare precisamente il valore di questo estremo superiore... Procediamo, invece, stimando la funzione:

$$\frac{|\sin(n^2x^2+1)+n|}{n^2+x^2} \leq \frac{|\sin(n^2x^2+1)|+n}{n^2+x^2} \leq \frac{1+n}{n^2} \leq \frac{2n}{n^2} \leq \frac{2}{n}.$$

Quindi:

$$0 \leq d_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| \leq \frac{2}{n},$$

che, grazie al Teorema dei Carabinieri e al Teorema 3.4 garantisce la convergenza uniforme.

A chi per la prima volta vede questo genere di procedimento suona sempre troppo vaga la descrizione di come e perché si scelgano certe maggiorazioni e non altre. Non c'è nessuno in grado di descrivere un algoritmo che permetta di trovare le stime per ogni singolo problema: è arte, esperienza, intuito, fortuna a seconda dei casi e delle persone. Nel caso che abbiamo appena visto, l'idea latente è semplice: il termine $\sin(n^2x^2+1)$ (che è proprio quello che complica maggiormente la struttura della funzione) è limitato e quindi irrilevante rispetto al termine n a cui è sommato a numeratore. Tanto vale sbarazzarsene, nella speranza di ricondursi ad una struttura più semplice. Analogamente a denominatore: il termine x^2 non è particolarmente significativo per via della presenza di n^2, e allora... via! Si osservi, passando, che se si fosse maggiorato togliendo il termine n^2 anziché x^2 si sarebbe arrivati alla inutile stima:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|\sin(n^2x^2+1)+n|}{n^2+x^2} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1+n}{x^2} = +\infty.$$

Un altro esempio:

$$f_n(x) = nxe^{-nx+\sin x} \qquad x \geq 0.$$

Anche qui la successione di funzioni converge puntualmente a 0 (convinti?). Calcolare l'estremo superiore di $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$ è impresa ardua (chi non ne è convinto scriva la derivata di f_n). Una maniera alternativa per affrontare il problema è questa: la successione non è troppo diversa da $g_n(x) = nxe^{-nx}$ che non converge uniformemente dato che $g_n'(x) = n(1-nx)e^{-nx}$ implica

$$\sup_{x\geq 0} g_n(x) = g_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-1},$$

Ispirandosi al fatto che i punti $x_n = \frac{1}{n}$ sono particolarmente significativi per g_n proviamo a collaudarli per f_n:

$$\sup_{x\geq 0} f_n(x) \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-1+\sin(1/n)}$$

(si noti la presenza del segno $\geq$ anziché del segno $=$). La successione $e^{-1+\sin(1/n)}$ converge per $n \to +\infty$ a $e^{-1} > 0$ e quindi non è possibile che la successione $\sup_{x\geq 0} f_n(x)$ sia infinitesima per $n \to +\infty$. Dunque, la convergenza di f_n a 0 non è uniforme.

Esercizio 4.1. *Sia $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in $\mathbb{R}$ e consideriamo la successioni di funzioni*

$$f_n(x) = n\left[\phi(x + \frac{1}{n}) - \phi(x)\right] \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

Dimostrare che:
(i) la successione f_n converge puntualmente a $f'(x)$;
(ii) se ϕ'' è limitata in $\mathbb{R}$ la convergenza è uniforme.

Convergenza uniforme in sottoinsiemi. Una successione di funzioni che non converga uniformemente in tutto il suo insieme di definizione I può, però, convergere in un sottoinsieme $J \subset I$. Ad esempio, la successione di funzioni

$$f_n(x) = e^{-nx} \qquad x \geq 0$$

converge puntualmente, ma non uniformemente, a $f = 0$ in $[0, +\infty)$. Se però studiamo la stessa successione di funzioni in un sottoinsieme della forma $[a, +\infty)$ con $a > 0$, allora

$$\sup_{x \geq a} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \geq a} e^{-nx} = e^{-na}$$

che tende a zero per $n \to +\infty$. Quindi la successione f_n converge uniformemente in $[a, +\infty)$ per ogni $a > 0$.

Esercizio 4.2. *Determinare alcuni insiemi di convergenza uniforme di*

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + x^{2n}} \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$

Soluzione. La successione f_n converge puntualmente alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \text{ o } x > 1, \\ 1/2 & x = \pm 1, \\ 1 & -1 < x < 1, \end{cases}$$

che è discontinua in ± 1. Pertanto gli insiemi di convergenza uniforme non possono contenere ± 1. Per una ragione che qui non c'è tempo di spiegare (ma il lettore attento e curioso farebbe bene a meditarci su), è sensato scegliere insiemi che siano a distanza strettamente positiva da ± 1: insiemi del tipo $[-r, r]$ con $0 < r < 1$ o $(-\infty, -R] \cup [R, +\infty)$ con $R > 1$ sono delle buone scelte, mentre $(-1, 1)$ non lo è!

Dato $r \in (0, 1)$ per studiare la convergenza uniforme in $[-r, r]$ dobbiamo calcolare (o stimare) l'estremo superiore di $|f_n(x) - f(x)|$:

$$\sup_{x \in [-r,r]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [-r,r]} \left| \frac{1}{1 + x^{2n}} - 1 \right| \sup_{x \in [-r,r]} \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}.$$

Il numeratore può essere maggiorato con $x^{2n} \leq r^{2n}$, mentre a denominatore si può utilizzare la stima $1 + x^{2n} \geq 1$ (mettere a denominatore una quantità più piccola dà luogo ad una maggiorazione!), quindi

$$\sup_{x \in [-r,r]} |f_n(x) - f(x)| \leq r^{2n}$$

L'oggetto a secondo membro è indipendente da $x \in [-r, r]$ ed è infinitesimo per $n \to +\infty$, essendo $r < 1$, perciò anche la successione $\sup_{x \in [-r,r]} |f_n(x) - f(x)|$ è infinitesima e quindi la successione converge uniformemente in $[-r, r]$ per ogni $r \in (0, 1)$.

Analogamente, se consideriamo insiemi del tipo $(-\infty,-R]\cup[R,+\infty)$ con $R>1$, vale

$$\sup_{|x|\geq R}|f_n(x)-f(x)| = \sup_{|x|\geq R}\frac{1}{1+x^{2n}} \leq \frac{1}{1+R^{2n}}$$

che tende a zero per $n\to+\infty$. La successione converge quindi uniformemente anche negli insiemi del tipo $\{x\,:\,|x|\geq R\}$ per ogni $R>1$.

Se una successione converge uniformemente in $J_1\subset I$ e in $J_2\subset I$, allora converge uniformemente anche nell'unione di questi insiemi $J_1\cup J_2$ (come si dimostra?). Lo stesso dicasi per un numero finito di insiemi: se f_n converge uniformemente in $J_1,\dots,J_n\subset I$, allora converge uniformemente anche in $J_1\cup\dots\cup J_n\subset I$. Lo stesso non si può dire per un numero infinito di insiemi... meditate, meditate...

Si può passare il limite sotto il segno di integrale nel caso di integrali impropri? Supponiamo di lavorare con una successione di funzioni

$$f_n\,:\,[a,+\infty)\to\mathbb{R} \qquad (a\in\mathbb{R}).$$

Nel caso in cui: (i) $\{f_n\}$ converga uniformemente in $[a,+\infty)$ ad f; (ii) ciascuna delle f_n sia integrabile in senso improprio in $[a,+\infty)$, cioè esista finito

$$\int_a^{+\infty} f_n(x)\,dx := \lim_{p\to+\infty}\int_a^p f_n(x)\,dx,$$

è ragionevole chiedersi se anche la funzione f sia integrabile in senso improprio e valga

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{n\to+\infty}\int_a^{+\infty} f_n(x)\,dx.$$

La risposta in generale è NO. Ad esempio, consideriamo

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\,e^{-\frac{x}{n}} \qquad x\geq 0.$$

Ciascuna di queste funzioni è integrabile in $[0,+\infty)$ e vale

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{p\to+\infty}\int_0^p \frac{1}{n}\,e^{-\frac{x}{n}}\,dx = \lim_{p\to+\infty}\int_0^{p/n} e^{-y}\,dy = \lim_{p\to+\infty} 1-e^{-p/n} = 1.$$

Ma la successione di funzioni f_n converge uniformemente a $f\equiv 0$ dato che

$$\sup_{x\geq 0}|f_n(x)-f(0)| = \sup_{x\geq 0}\frac{1}{n}\,e^{-\frac{x}{n}} = \frac{1}{n}$$

(la funzione $e^{-x/n}$ è positiva e decrescente in x). Il problema è che, formalmente, il passaggio al limite sotto segno di integrale nel caso improprio consiste nel commutare l'operazione di limite per $n\to+\infty$ non solo con l'operazione di integrazione, ma anche con l'ulteriore operazione di limite introdotta dalla definizione dell'integrale improprio:

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{p\to+\infty}\int_a^p f_n(x)\,dx = \lim_{p\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\int_a^p f_n(x)\,dx = \lim_{p\to+\infty}\int_a^p \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx.$$

La convergenza uniforme non è in grado di garantire la possibilità di inversione d'ordine dei due limiti in n e in p. Con un'ipotesi ulteriore, che consiste nel richiedere l'esistenza di una funzione (indipendente da n) integrabile in senso improprio che stimi dall'alto il valore assoluto delle funzioni f_n, lo scambio è invece possibile.

Proposizione 4.3. *(Convergenza dominata) Sia $f_n : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R}$ una successione di funzioni convergente uniformemente a $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$. Supponiamo che esista una funzione $g : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ non negativa integrabile in senso improprio in $[a,+\infty)$ e tale che*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \qquad \forall\, x \geq a, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Allora anche le funzioni f_n e f sono integrabili in $[a,+\infty)$ e vale

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Dimostrazione. Dato che la stima $|f_n(x)| \leq g(x)$ vale per ogni n e per ogni x, passando al limite puntuale per $n \to +\infty$, si deduce che la stessa stima vale anche per la funzione limite

$$|f(x)| \leq g(x) \qquad \forall\, x \geq a, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Grazie ai Teoremi di confronto per integrali impropri, le funzioni f_n e di f sono integrabili in $[a,+\infty)$. Inoltre, per ogni $p > a$,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^\infty f_n(x)\,dx - \int_a^\infty f(x)\,dx\right| &\leq \int_a^p |f_n(x) - f(x)|\,dx + \int_p^\infty |f_n(x) - f(x)|\,dx \\ &\leq (p-a) \sup_{a\leq x\leq p} |f_n(x) - f(x)| + 2\int_p^\infty g(x)\,dx \leq (p-a)d_n + 2\int_p^\infty g(x)\,dx.\end{aligned}$$

grazie alla stima $|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x)| + |f(x)| \leq 2g(x)$ e dove

$$d_n := \sup\{|f_n(x) - f(x)| \,:\, x \geq a\}.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, dato che la funzione g è integrabile in $[a,+\infty)$, esiste $\bar{p}$ tale che

$$2\int_p^\infty g(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Inoltre dall'ipotesi di convergenza uniforme, segue che d_n è infinitesima, quindi esiste n_ε tale che $d_n < \varepsilon/2(p-a)$ per $n \geq n_\varepsilon$. Inserendo nella stima precedente si deduce che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che, per ogni $n \geq n_\varepsilon$,

$$\left|\int_a^\infty f_n(x)\,dx - \int_a^\infty f(x)\,dx\right| \leq (p-a)d_n + 2\int_p^\infty g(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

cioè la conclusione. ∎

5. Le serie di funzioni in poche parole

Pensando le successioni di funzioni come un'evoluzione del concetto di successione numerica, è naturale domandarsi come si definiscano le *serie di funzioni.*

Definizione 5.1. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni definite in $I \subset \mathbb{R}$. Definiamo* serie di funzioni associata a $\{f_n\}$ *o* serie di funzioni di termine generico f_n, *la successione di funzioni il cui termine generico è*

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \qquad x \in I.$$

Se la successione $\{s_n\}$ converge puntualmente/uniformemente alla funzione f, la serie si dice convergente puntualmente/uniformemente *e la funzione f è la* somma della serie.

Un tipico esempio di serie di funzioni è la SERIE GEOMETRICA:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad x \in \mathbb{R}.$$

In questo caso, per $x \neq 1$, la successione $\{s_n\}$ si può scrivere come

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Dato che x^{n+1} è convergente se e solo se $|x| < 1$, anche la successione di funzioni $\{s_n\}$ e quindi, per definizione, la serie geometrica sono convergenti puntualmente in $(-1, 1)$. Il limite puntuale è dato dalla funzione $f(x) = \frac{1}{1-x}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x} \qquad x \in (-1, 1).$$

La convergenza è uniforme? Per rispondere alla domanda bisogna calcolare

$$\sup_{x \in (-1,1)} |s_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in (-1,1)} \left| \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - \frac{1}{1 - x} \right| = \sup_{x \in (-1,1)} \frac{|x|^{n+1}}{1 - x},$$

che è pari a $+\infty$! La convergenza, quindi, non è uniforme. Alla stessa conclusione si sarebbe potuti arrivare notando che ciascuna delle funzioni s_n è limitata in $(-1, 1)$, mentre il limite puntuale $1/(1 - x)$ non lo è, ed usando il Teorema 3.9.

Se consideriamo sottoinsiemi dell'insieme di convergenza $(-1, 1)$ della forma $[-r, r]$ con $0 \leq r < 1$, la convergenza è uniforme: infatti

$$\sup_{x \in [-r,r]} |s_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [-r,r]} \frac{r^{n+1}}{1 - r} \to 0 \qquad \text{per} \quad n \to +\infty.$$

La serie geometrica quindi converge puntualmente in $(-1, 1)$ e uniformemente in $[-r, r]$ con $0 \leq r < 1$.

Per le serie di funzioni valgono le proprietà relative a continuità e integrabilità.

TEOREMA 5.2. *Sia* $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ *una serie di funzioni convergente uniformemente alla funzione* $f : I \to \mathbb{R}$.
(i) Se tutte le f_n *sono continue in* I*, allora anche la funzione* f *è continua in* I.
(ii) Se $I = [a, b]$ *e le* f_n *sono integrabili in* I*, allora anche* f *è integrabile in* I*. Inoltre*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{5.1}$$

Nel caso delle serie di funzioni, la formula (5.1) esprime la possibilità di commutare il segno di serie con quello di integrale:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\, dx.$$

Il problema fondamentale nel caso delle serie di funzioni, sta nella difficoltà di determinare quando la convergenza sia uniforme. Un criterio particolarmente utile è dato dalla cosiddetta *convergenza totale*.

TEOREMA 5.3. *(Convergenza totale) Data la serie di funzioni* $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ *definite in* $I \subseteq \mathbb{R}$, *sia* $L_n := \sup_{x\in I} |f_n(x)|$. *Se*

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n < +\infty, \tag{5.2}$$

allora la serie converge uniformemente in I.

Consideriamo, ad esempio, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in \mathbb{R},$$

e dimostriamo che tale serie soddisfa la condizione (5.2) in ogni insieme del tipo $[-R, R]$ con $R > 0$ (detto, in altre parole, la serie *converge totalmente* in $[-R, R]$ per ogni $R > 0$). Fissato $R > 0$, calcoliamo

$$\sup_{x\in[-R,R]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[-R,R]} \left|\frac{x^n}{n!}\right| = \sup_{x\in[-R,R]} \frac{|x|^n}{n!} = \frac{R^n}{n!} =: L_n.$$

Dato che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{R^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{R}{n+1} = 0,$$

la serie di termine generico $L_n = \frac{R^n}{n!}$ è convergente e quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ è convergente uniformemente. A prezzo di una fatica che ora non abbiamo intenzione di compiere, si dimostra che la somma di questa serie è una funzione particolarmente famosa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Una maniera per generare serie di funzioni a partire da una funzione data $f : I \to \mathbb{R}$ che possieda derivate di ogni ordine in un punto $x_0 \in I$ è tramite il polinomio di Taylor: in questo caso il termine $n-$esimo della serie di funzioni è il termine di grado n del polinomio di Taylor

$$f_0(x) = f(x_0), \quad f_1(x) = f'(x_0)(x - x_0), \quad \ldots, \quad f_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n,$$

La corrispondente serie è detta *serie di Taylor* della funzione f in $x = x_0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

Le singole funzioni che vengono sommate sono polinomi, quindi la serie può essere considerata in $x \in \mathbb{R}$, ma non è detto che la serie sia convergente in tutto $\mathbb{R}$. La serie geometrica, ad esempio, è la serie di Taylor di $f(x) = 1/(1-x)$ in $x_0 = 0$ e converge solo in $(-1,1)$. Altre serie famose sono quelle prodotte dalle funzioni $\sin x$ e $\cos x$ in $x_0 = 0$:

$$\sin x \ : \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}, \qquad \cos x \ : \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}.$$

Nel caso in cui la serie di Taylor di una funzione f sia convergente in un intervallo I e coincida con la funzione f di partenza, cioè valga

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \qquad \forall\, x \in I,$$

si dice che f È ANALITICA IN I.