

1 marzo 2009

**3.1. Esercizio.** Assegnata la successione di numeri reali

$$a_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{2^n \sqrt{2}} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- calcolare i suoi primi tre termini  $a_1, a_2, a_3$ ,
- provare che gli  $a_n$  sono tutti numeri razionali.

**3.2. Esercizio.** Assegnata la successione di numeri reali

$$a_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- calcolare i suoi primi tre termini  $a_1, a_2, a_3$ ,
- provare che gli  $a_n$  sono tutti numeri naturali.

**3.3. Esercizio.** Assegnata la successione

$$a_n = (1 + \sqrt{2})^n = \alpha_n + \beta_n \sqrt{2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- determinare  $\alpha_n$  e  $\beta_n$  per  $n = 1, 2, 3$
- determinare  $\alpha_n^2 - 2\beta_n^2$  per  $n = 1, 2, 3$
- riconoscere che  $\forall n : |\alpha_n - \beta_n \sqrt{2}| \leq 1$ .