ANALISI MATEMATICA I

Soluzioni Esonero 1

15 aprile 2009

1.1. Esercizio. *Assegnata la successione* $\{a_n\}$

$$a_n = \frac{n\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n+1}$$

- *esaminare se é limitata,*
- *determinare i suoi punti di accumulazione,*
- *calcolare il minimo e il massimo limite.*

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Provare che una successione $\{a_n\}$ é limitata vuol dire provare che esiste un valore M tale che

$$\forall n: \quad |a_n| \leq M$$

Nel nostro caso si ha $M = 1$ infatti

$$|a_n| = \frac{n}{n+1}\left|\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right| \leq 1$$

avendo tenuto conto che

$$\frac{n}{n+1} \leq 1$$

I punti di accumulazione di una successione, detti anche punti limite, sono quei valori λ tali che in ogni loro intorno cadono termini a_m delle successione per infiniti indici m.
Ovvero sono tutti e soli i limiti di sottosuccessioni $\{a_{n_k}\} \subseteq \{a_n\}$ convergenti.
Tenuto presente che

$$a_n = b_n\,c_n: \quad b_n = \frac{n}{n+1}, \quad c_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

e tenuto presente che

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 1$$

le uniche sottosuccessioni convergenti $\{a_{n_k}\}$ sono quelle per le quali sono convergenti le $\{c_{n_k}\}$ le quali possono convergere solo a

$$-1, \quad 0, \quad 1$$

I punti di accumulazione o punti limite della successione assegnata sono pertanto solo i tre numeri $-1, \quad 0, \quad 1.$

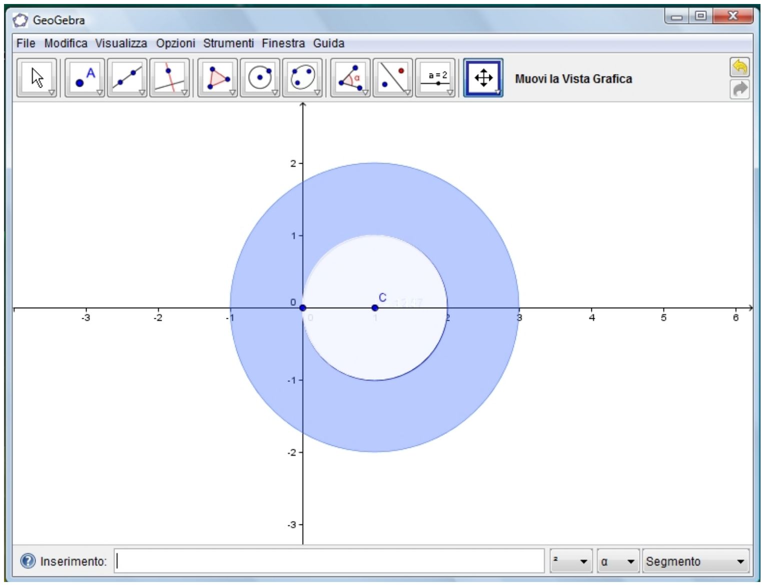

FIGURA 1. $1 \leq (x-1)^2 + y^2 < 4$

Il minimo e il massimo limite della successione sono, rispettivamente il piú piccolo e il piú grande dei punti limite: quindi

$$\liminf a_n = -1, \quad \limsup a_n = 1$$

1.2. Esercizio. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^2$ l'insieme dei punti (x, y) che verificano le disuguaglianze*

$$1 \leq (x-1)^2 + y^2 < 4$$

- *disegnare E,*
- *determinare la sua chiusura $\overline{E}$,*
- *esaminare se E é compatto,*
- *determinare la frontiera di E.*

SOLUZIONE:

L'insieme E é disegnato in Figura 1.
La chiusura $\overline{E}$ dell'insieme E, corona circolare, é E stesso unito alla circonferenza maggiore $(x-1)^2 + y^2 = 4$.
E non é compatto perché non é chiuso: $E \neq \overline{E}$.
La frontiera della corona circolare E é costituita dalle due circonferenze che la delimitano

$$(x-1)^2 + y^2 = 1, \quad (x-1)^2 + y^2 = 4$$

circonferenze entrambe di centro $C = (1, 0)$ e raggi 1 e 2.

1.3. Esercizio. *Assegnata la serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\rho^2-1)^k$$

- *determinare per quali* $\rho \in \mathbb{R}$ *é convergente,*
- *determinare per quali* ρ *é assolutamente convergente,*
- *determinare la somma.*

SOLUZIONE:

La serie assegnata é una serie geometrica costruita sulla ragione ρ^2-1. Tenuto conto del criterio del rapporto, la serie assegnata converge assolutamente in corrispondenza a tutti i ρ tali che

$$|\rho^2-1|<1$$

ovvero

$$-1<\rho^2-1<1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0<\rho^2 \\ \rho^2<2 \end{cases}$$

Quindi converge assolutamente per

$$\rho \in (-\sqrt{2},0)\cup(0,\sqrt{2})$$

e non converge per $|\rho|>\sqrt{2}$.
Nei valori $\rho=0$ e $\rho=\pm\sqrt{2}$ la serie non converge (né assolutamente né semplicemente) perché i termini non costituiscono una successione infinitesima.
Riassumendo la serie converge semplicemente e assolutamente nello stesso insieme

$$\rho \in (-\sqrt{2},0)\cup(0,\sqrt{2})$$

La somma, ricavata dall'espressione della somma delle serie geometriche, é

$$S(\rho)=\frac{1}{1-(\rho^2-1)}=\frac{1}{2-\rho^2}$$

1.4. Esercizio. *Assegnate le funzioni*

$$f(x)=|x|, \quad g(x)=\arctan(x), \qquad x\in\mathbb{R}$$

- *provare che sono entrambe uniformemente continue,*
- *provare che sono uniformemente continue anche le due funzioni composte*

$$f[g(x)], \quad g[f(x)]$$

- *esaminare se siano uniformemente continue anche le funzioni*

$$f^2(x), \quad g^2(x)$$

SOLUZIONE:

Le due funzioni f e g sono entrambe lipschitziane, quindi uniformemente continue.
La prima verifica la disuguaglianza

$$|f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

cioé é lipschitziana con $L = 1$.
La seconda verifica, in base al teorema di Lagrange, la disuguaglianza

$$|g(x) - g(y)| = |g'(\xi)||x - y| = \frac{1}{1+\xi^2}|x - y| \leq |x - y|$$

ed é quindi anch'essa lipschitziana con ancora $L = 1$.
Le due funzioni composte $f[g(x)], \quad g[f(x)]$, che fra l'altro coincidono, sono uniformemente continue per vari equivalenti motivi:

- sono lipschitziane, perché componendo funzioni lipschitziane si ottengono funzioni ancora lipschitziane,
- tenuto conto che $\forall x \in \mathbb{R}: \;\; g(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$ allora l'uniforme continuitá di $f[g(x)]$ si ricava semplicemente dall'uniforme continuitá della $f(x)$ in $[-\pi/2, \pi/2]$,
- l'unif. continuitá di $f[g(x)]$ deriva direttamente dalla disuguaglianza
$$|f[g(x)] - f[g(y)]| \leq |g(x) - g(y)| \leq |x - y|$$

Affermazioni, pur intuitive, circa la limitatezza delle derivate sono non corrette: una delle due funzioni, la f, non é, come ben noto, derivabile in $\mathbb{R}$, lo é solo per $x \neq 0$.
La uniforme continuitá (o meno) dei quadrati

$$f^2(x) = f(x).f(x), \qquad g^2(x) = g(x).g(x)$$

é diversa nei due casi:

- $f^2(x) = x^2$ non é uniformemente continua in $\mathbb{R}$: infatti
$$|x^2 - y^2| = |x + y|\,|x - y|$$
implica che per avere $|x^2 - y^2| \leq \varepsilon$ occorre che
$$|x - y| \leq \frac{\varepsilon}{|x + y|}$$
quantitá, a destra, che diminuisce indefinitamente al crescere di x e y.
- $g^2(x)$ é invece uniformemente continua, infatti
$$|g^2(x) - g^2(y)| = |g(x) + g(y)|\,|g(x) - g(y)| \leq \pi\,|g(x) - g(y)|$$
avendo tenuto conto che $|g(x)| \leq \pi/2, \; |g(y)| \leq \pi/2$.

- altrettanto possibile sarebbe stato servirsi direttamente del teorema di Lagrange per riconoscere che $g^2(x)$ é lipschitziana:

  $$|g^2(x) - g^2(y)| = 2|g(\xi)|\,|g'(\xi)|\,|x-y| \leq \pi|x-y|$$

  essendo

  $$|g(\xi)| \leq \frac{\pi}{2}, \quad |g'(\xi)| = \frac{1}{1+\xi^2} \leq 1$$