ANALISI MATEMATICA I

Soluzioni Esonero 2

7 giugno 2010

2.1. Esercizio. *Assegnata la funzione*

$$f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}, \quad x > 0$$

- *determinare se é integrabile (in senso classico o improprio) nell'intervallo* $[0, 1]$
- *determinare se é integrabile (in senso classico o improprio) nell'intervallo* $[1, +\infty)$
- *determinare se nei predetti intervalli é integrabile (in senso classico o improprio)* $f^2(x)$.

SOLUZIONE:

La funzione

$$f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x})}{x} = \left(\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

é continua in $(0, 1]$ ma non é limitata, quindi non é integrabile in senso classico.
Tenuto conto tuttavia che

$$\forall x \in (0, 1]; \quad \left|\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right| \leq 1 \quad \to \quad |f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

si riconosce, per confronto, che $|f(x)|$ é dotata di integrale improprio in $[0, 1]$ e pertanto esiste

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 f(x)dx$$

cioé $f(x)$ é integrabile in senso improprio su $[0, 1]$.
Per quanto concerne l'integrale sulla semiretta $[1, +\infty)$ si ha

$$\int_1^M \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}dx = 2\int_1^{\sqrt{M}} \frac{\sin(t)}{t}dt = 2\left.\frac{-\cos(t)}{t}\right|_1^{\sqrt{M}} - 2\int_1^{\sqrt{M}} \frac{cos(t)}{t^2}dt$$

Tenuto conto che i due addendi a secondo membro hanno limite per $M \to +\infty$

- il primo perché $\lim_{M\to\infty} \frac{-\cos(\sqrt{M})}{\sqrt{M}} = 0$

- il secondo perché

$$\left|\frac{cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$$

  risulta dotata di integrale improprio su $[1, +\infty]$

se ne deduce che $f(x)$ é dotata di integrale improprio sulla semiretta $[1, +\infty)$.
L'esistenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

precedentemente incontrato dopo la sostituzione $t = \sqrt{x}$, poteva anche essere ottenuta ricordando l'esistenza di tutti gli integrali impropri della forma

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, \sin(x)\, dx$$

relativi a funzioni $f(x)$ continue, monotone, decrescenti e infinitesime per $x \to +\infty$, risultato spesso indicato come *criterio di Leibnitz.*
Applicare direttamente tale *criterio di Leibnitz* all'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{t})}{t}\, dt$$

sarebbe stato tuttavia non corretto perché la funzione integranda in questo caso non é della forma prescritta

$$\sin(x) \times f(x)$$

La funzione $f^2(x)$:

- non é integrabile in $(0, 1]$: infatti per $t \approx 0 :\quad \sin(t) \approx t$ implica

$$\sin(t) \geq \frac{1}{2}t \quad \to \quad \frac{\sin^2(\sqrt{x})}{x^2} \geq \frac{1}{4}\frac{x}{x^2} = \frac{1}{4x}$$

  con l'ultima espressione non integrabile in $(0, 1]$.
- é integrabile in $[1, +\infty)$: infatti

$$|f^2(x)| \leq \frac{1}{x^2}$$

  con l'ultima espressione integrabile in $[1, +\infty)$.

2.2. Esercizio. *Assegnata la successione*

$$f_n(x) = nx(1-x^2)^n \quad n = 1, 2, 3, ...$$

- *esaminare se é convergente nell'intervallo* $[0,\ 1]$,
- *esaminare se* $\{f_n(x)\}$ *sia o meno convergente uniformemente in* $[0, 1]$.

Soluzione:

Tutte le $f_n(x)$ valgono zero nei punti 0, 1: pertanto in tali punti la successione é convergente.
Per $x \in (0,\ 1)$ posto

$$|1-x^2| = \frac{1}{\rho}, \quad \rho > 1$$

riesce

$$n|x||1-x^2|^n \le \frac{n}{\rho^n} \le \frac{n}{1 + n\rho + \frac{n^2}{2}\rho^2}$$

da cui segue

$$\lim_{n\to\infty} n|x||1-x^2|^n = 0$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

Una prova alternativa della convergenza a zero della successione $\{f_n(x)\}$ in $[0, 1]$ alla funzione nulla si poteva ricavare dalla convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

che implica che gli addendi costituiscono una successione infinitesima.
La convergenza della serie é riconoscibile tramite il criterio del rapporto

$$\frac{(n+1)|x||1-x^2|^{n+1}}{n|x||1-x^2|^n} = \frac{n+1}{n}|1-x^2| \to |1-x^2|$$

limite che risulta minore di 1 appunto $\forall x \in [0, 1]$.

Per riconoscere se la convergenza delle $f_n(x)$, funzioni non negative, al loro limite zero sia, o meno, uniforme in $[0, 1]$ occorre calcolare la successione dei massimi

$$M_n = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x)$$

e riconoscere se riesce, o meno, $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$.
Tenuto conto che

$$f_n'(x) = n(1-x^2)^n - 2n^2x^2(1-x^2)^{n-1} = n(1-x^2)^{n-1}\left(1-(1+2n)x^2\right)$$

si annulla in un solo punto all'interno di $[0,1]$,

$$f'_n(x) = 0 \quad \to \quad x = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

essendo prima positiva e poi negativa, si riconosce che in tale punto si raggiunge il massimo

$$M_n = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) = \frac{n\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^n}{\sqrt{2n+1}}$$

Tenuto conto che

$$M_n = \mathcal{O}(\sqrt{n}), \quad \lim_{n\to\infty} M_n = +\infty$$

se ne deduce che la convergenza delle $f_n(x)$ non é uniforme.

Un altro modo con cui riconoscere che la successione $\{f_n(x)\}$ non é uniformemente convergente a 0 in $[0,1]$ é quello di riconoscere che la successione

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$$

non é infinitesima, cioé gli integrali delle $f_n(x)$ non tendono all'integrale della funzione limite.
Infatti

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)dx = -\frac{n}{2(n+1)}\int_0^1 (-2x)(n+1)(1-x^2)^n dx = \frac{n}{2(n+1)} \to \frac{1}{2} \neq 0$$

2.3. Esercizio. *Assegnata la serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)x^n$$

- *trovare l'intervallo di convergenza,*
- *determinare la somma.*

SOLUZIONE:

Dal criterio del rapporto

$$\frac{|(2^{n+1}-1)x^{n+1}|}{|(2^n-1)x^n|} = |x|\frac{2^{n+1}-1}{2^n-1} \to 2|x|$$

si riconosce che l'intervallo di convergenza é $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$.
Agli estremi la serie non converge perché il termine generale

$$(2^n-1)\left(\pm\frac{1}{2}\right)^n = (\pm 1)^n - \left(\pm\frac{1}{2}\right)^n$$

non é infinitesimo.

Tenuto presente che

$$\forall x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right): \quad \sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x}$$

si ricava

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)x^n = \frac{x}{(1-2x)(1-x)}$$

2.4. Esercizio. *Assegnata l'equazione differenziale*

$$y' = -e^{-y}$$

- *dimostrare che le sue soluzioni $y(x)$ sono funzioni monotone,*
- *dimostrare che sono concave,*
- *determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = -e^{-y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione:

L'equazione assegnata é di tipo autonomo.
Tenuto presente che $-e^{-y} \neq 0$ si riconosce che non esistono soluzioni d'equilibrio.
Tenuto presente che

$$y'(x) = -e^{-y(x)} < 0$$

si riconosce che le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale sono tutte funzioni monotone decrescenti.
Tenuto presente che

$$y''(x) = e^{-y(x)}\, y'(x) \quad \to \quad y'' = -e^{-2y(x)} < 0$$

si riconosce che le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale sono tutte funzioni concave.
La soluzione del problema di Cauchy verifica la seguente equazione

$$\int_0^y e^z dz = -\int_0^x dt \quad \to \quad e^y - 1 = -x \quad \to \quad e^y = 1 - x$$

da cui

$$y(x) = \log(1-x)$$

soluzione ovviamente definita per $x < 1$, ovviamente decrescente e concava.