

Appunti sui numeri reali

Alessandro Figà Talamanca

24 febbraio 2010

Premessa

Questi appunti forniscono una dimostrazione del Teorema 1.19 a pag. 8 del libro "Pincipi di Analisi Matematica" di Walter Rudin, McGraw-Hill 1991, diversa da quella fornita dallo stesso libro nel paragrafo 1.8. Gli appunti devono quindi essere letti tenendo presente i contenuti del Capitolo 1 del libro di Rudin, nel quale i numeri reali sono definiti come un *campo ordinato con la proprietà dell'estremo superiore*.

Questa definizione può essere parafrasata dicendo che i numeri reali sono un insieme in cui sono definite le operazioni di somma e prodotto ed una relazione di ordine che godono le stesse proprietà della somma, del prodotto e della relazione d'ordine dei numeri razionali, ma che in aggiunta soddisfa al cosiddetto *assioma dell'estremo superiore*, che si può enunciare come segue:

Assioma dell'estremo superiore. *Se A è un insieme non vuoto di numeri reali che è limitato superiormente, allora esiste il più piccolo dei maggioranti di A . Esiste cioè un numero reale $\gamma = \sup A$ tale che per ogni $x \in A$ risulta $x \leq \gamma$, e tale che se $\lambda \geq x$ per ogni $x \in A$, allora $\gamma \leq \lambda$.*

Una definizione come quella che abbiamo dato non è completa se non si dimostra che un sistema che gode di queste proprietà esiste; in altre parole se non si dimostra che le proprietà che abbiamo elencato, e cioè gli assiomi che definiscono il sistema, non ci possono portare ad una contraddizione.

Quando si definisce un ente matematico attraverso assiomi, e cioè elencando le proprietà che si desidera abbia questo ente, non è sempre agevole dimostrare che gli assiomi non sono contraddittori. In effetti quando gli assiomi si riferiscono ad un insieme che non è finito e che incorpora almeno le proprietà dei numeri naturali, il problema dell'esistenza di una struttura definita assiomaticamente, ovvero della non contraddittorietà degli assiomi può essere affrontato solo *relativamente* ad un altro sistema più semplice del quale si suppone l'esistenza. Per chiarire la portata e il significato di questa limitazione lo studente interessato dovrà aspettare di poter frequentare un insegnamento di logica matematica che includa una trattazione del cosiddetto teorema di Gödel.

Sta di fatto che in questi appunti dimostreremo che i numeri reali esistono nell'ipotesi che esistano i numeri razionali. In altre parole dimostreremo che aggiungendo l'assioma della continuità agli altri assiomi soddisfatti dai numeri razionali, non si introduce una contraddizione. Se la teoria dei numeri razionali non è contraddittoria non lo sarà nemmeno quella dei numeri reali. A rigore dovremmo anche dimostrare che il sistema dei numeri razionali non è contraddittorio, costruendo i numeri razionali a partire dai numeri naturali.

Ma la "costruzione" dei numeri razionali a partire dai numeri naturali

(passando per i numeri interi relativi) è svolta nel programma di algebra, il che ci consente di ometterla. Quanto ai numeri naturali anche essi possono essere definiti attraverso assiomi (ad esempio attraverso i cosiddetti *assiomi di Peano*), ma è più facile pensare che la loro esistenza e le loro proprietà elementari siano basate sulla nostra esperienza diretta (esperienza mentale beninteso). Per lo meno questa è l'opinione (come tale del tutto opinabile) dell'autore di questi appunti. Ci inoltriamo infatti a questo punto su un terreno "problematico" di competenza della riflessione filosofica più che della sola matematica. Chi è interessato a studiare più approfonditamente questi problemi potrà avere la dovuta soddisfazione quando negli anni successivi potrà frequentare un insegnamento di logica matematica.

Infine dovremmo rispondere ad una possibile curiosità dello studente: perché si propone una dimostrazione del Teorema 1.19 del libro di Rudin diversa da quella fornita dal libro stesso? E' quindi sbagliata la dimostrazione del libro? Tutt'altro. La dimostrazione del libro è corretta, e, in un certo senso è quella più naturale se si sceglie di presentarla prima di aver definito le successioni di Cauchy. Noi abbiamo scelto di posporre la dimostrazione del teorema di "esistenza" dei numeri reali a dopo la trattazione delle successioni di Cauchy in uno spazio metrico. Questo ci consente di utilizzare strumenti e concetti che non erano disponibili quando abbiamo dato la definizione assiomatica dei numeri reali. E' solo perché disponiamo di questi strumenti che la dimostrazione che presentiamo qui può essere ritenuta più semplice.

Passiamo ora all'enunciato del teorema che vorremmo dimostrare

Teorema 1 *Esiste un campo ordinato \mathbb{R} che ha la proprietà dell'estremo superiore. Inoltre \mathbb{R} contiene \mathbb{Q} come sottocampo.*

Il seguito di questi appunti è dedicato alla dimostrazione di questo teorema.

Partiamo dall'insieme \mathfrak{C} delle successioni di numeri razionali che soddisfano alla *condizione di Cauchy*, cioè l'insieme delle successioni di numeri razionali che verificano la seguente definizione.

Definizione 1 *Una successione a_n a valori nei numeri razionali si dice successione di Cauchy se, per ogni numero razionale $\epsilon > 0$, esiste un intero positivo N tale che $n, m \geq N$ implica $|a_n - a_m| < \epsilon$.*

Le successioni di Cauchy a valori nei numeri razionali non sono necessariamente convergenti (a un numero razionale). Dobbiamo per il momento dimenticare che esistono i numeri reali, e quindi non possiamo nemmeno dire che una successione di Cauchy di numeri razionali "converge ad un numero reale".

Tuttavia si può osservare che i numeri razionali costituiscono uno spazio metrico con la distanza definita dal valore assoluto: $d(x, y) = |x - y|$. (La distanza, ovviamente assume solo valori razionali.)

In questo senso una successione di Cauchy di numeri razionali altro non è che una successione di Cauchy nello spazio metrico costituito dai numeri razionali. E' così che dalla definizione seguono alcune proprietà delle successioni di Cauchy in uno spazio metrico (ma non quelle che valgono in uno spazio metrico completo).

Più precisamente valgono le seguenti proposizioni:

Proposizione 2 . *Ogni successione convergente è di Cauchy.*

DIMOSTRAZIONE. Se a_n è convergente ad un numero razionale a allora per ogni $\varepsilon > 0$, razionale esiste un intero positivo N , tale che, se $n \geq N$ allora $|a_n - a| < \varepsilon/2$. Ne segue che se $n, m \geq N$ risulta

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_n - a_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Proposizione 3 . *Una successione di Cauchy è limitata.*

DIMOSTRAZIONE. Sia a_n una successione di Cauchy di numeri razionali. Allora esiste un intero positivo N tale che per ogni intero positivo p risulta

$$|a_{N+p} - a_N| < 1.$$

Ne segue che per ogni intero positivo p ,

$$|a_{N+p}| \leq 1 + |a_N|.$$

Sia ora $M = \max\{|a_1|, \dots, |a_N|\} + 1$, allora per ogni n , risulta $|a_n| \leq M$.

Proposizione 4 . *Se una successione di Cauchy a_n contiene una estratta a_{n_k} convergente verso ℓ , allora anche a_n converge verso ℓ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\varepsilon > 0$ un numero razionale. Dobbiamo dimostrare che esiste un intero positivo N tale che, se $n \geq N$, risulta $|a_n - \ell| < \varepsilon/2$. Sappiamo che esiste K tale che se $k \geq K$ allora $|a_{n_k} - \ell| < \varepsilon/2$. Sappiamo anche che esiste N tale che se $n, m \geq N$ allora $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$. Sia quindi $n \geq N$, e scegliamo n_k tale che $k \geq K$ e $n_k \geq N$. Allora, se $n \geq N$,

$$|a_n - \ell| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \ell| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Una proprietà speciale delle successioni di Cauchy nel campo razionale, deducibile dalle precedenti proposizioni è la seguente.

Proposizione 5 . *Sia a_n una successione di Cauchy nel campo razionale. Supponiamo che a_n non converga a zero. Allora*

1) *Esiste un numero razionale $\delta > 0$ tale che $|a_n| > \delta$ eccetto che per un numero finito di indici n .*

2) *Il segno di a_n è costante eccetto che per un numero finito di indici. In altre parole il segno di a_n non può cambiare infinite volte.*

DIMOSTRAZIONE. Se non valesse 1) per ogni intero positivo k si potrebbe trovare un termine della successione a_{n_k} con la proprietà che $|a_{n_k}| \leq \frac{1}{k}$. Si potrebbe altresì rendere la successione n_k crescente. In tal modo a_{n_k} risulterebbe una successione estratta da a_n che converge a zero. Per il Lemma 3 convergerebbe a zero anche a_n , il che contraddice l'ipotesi. Per dimostrare 2) utilizziamo 1). Supponiamo che $\delta > 0$ sia un numero razionale tale che $|a_n| > \delta$ eccetto che per un numero finito di indici. Scegliamo N tale che per $n, m \geq N$ si abbia $|a_n - a_m| < \delta$, ed inoltre tale che per $n \geq N$ risulti $|a_n| \geq \delta$. Allora, per $n \geq N$, a_n deve avere lo stesso segno di a_N . Infatti siccome hanno ambedue distanza maggiore di δ dallo zero, se fossero dai lati opposti di zero avrebbero distanza tra loro almeno 2δ , cosa impossibile perché $|a_n - a_N| < \delta$ quando $n \geq N$.

Naturalmente, per i numeri razionali non vale il criterio di convergenza di Cauchy che vale per gli spazi metrici completi come \mathbb{R} o \mathbb{R}^d , come si verifica svolgendo il seguente esercizio.

Esercizio 1 *Esiste una successione di Cauchy a_n di numeri razionali che non converge (ad un numero razionale).*

Torniamo ora al nostro insieme \mathfrak{C} delle successioni di Cauchy di numeri razionali. Osserviamo che su questo insieme possono essere definite le operazioni di somma e di prodotto termine a termine. Vale infatti il seguente risultato:

Lemma 6 . *Date due successioni di Cauchy, a_n e b_n le successioni $a_n + b_n$ e $a_n \cdot b_n$ sono ancora di Cauchy.*

DIMOSTRAZIONE. Dato $\epsilon > 0$ esistono interi N_1 ed N_2 tali che se $n, m > N_1$ allora $|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}$, e se $n, m > N_2$, allora $|b_n - b_m| < \frac{\epsilon}{2}$. Pertanto se N è il più grande tra N_1 e N_2 ed $n, m > N$,

$$|a_n + b_n - (a_m + b_m)| \leq |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Questo dimostra che la successione $a_n + b_n$ è di Cauchy. Per dimostrare che $a_n \cdot b_n$ è di Cauchy utilizziamo il fatto che le successioni a_n e b_n sono limitate,

quindi esiste un numero razionale $M > 0$, tale che $|a_n|, |b_n| \leq M$. Ne segue che

$$\begin{aligned} |a_n \cdot b_n - a_m \cdot b_m| &= |a_n \cdot b_n - a_n \cdot b_m + a_n \cdot b_m - a_m \cdot b_m| \leq \\ &|a_n \cdot (b_n - b_m)| + |(a_n - a_m) \cdot b_m| \leq M|b_n - b_m| + M|a_n - a_m|. \end{aligned}$$

Pertanto se, dato $\epsilon > 0$ si sceglie un intero N tale che per $n, m \geq N$ risulti $|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2M}$ ed anche $|b_n - b_m| < \frac{\epsilon}{2M}$, risulterà, per $n, m \geq N$, $|a_n \cdot b_n - a_m \cdot b_m| < \epsilon$. Questo dimostra che anche la successione $a_n \cdot b_m$ è di Cauchy.

E' molto facile verificare che la somma ed il prodotto termine a termine così definite per \mathfrak{C} soddisfano agli assiomi A1-A5, M1-M4, e D, elencati a pag. 5 del libro di Rudin, purché lo zero 0 e l'unità 1 siano definiti, rispettivamente, come la successione identicamente nulla (elemento neutro rispetto alla somma) e la successione identicamente uno (elemento neutro rispetto al prodotto). Tuttavia \mathfrak{C} non soddisfa l'assioma M5. Ad esempio la successione $a_n = \frac{1}{n}$ è una successione di Cauchy, appartiene pertanto a \mathfrak{C} , ma non esiste una successione di Cauchy b_n che verifichi, per ogni n , $a_n \cdot b_n = 1$. Nella terminologia dell'algebra questo significa che l'insieme \mathfrak{C} con le operazioni che abbiamo introdotto ha la struttura di *anello commutativo con identità*, ma non è un *campo*.

Osserviamo però che \mathfrak{C} pur non essendo un *insieme ordinato* secondo la Definizione 1.5 a pag. 3 del libro di Rudin, in quanto non soddisfa alla condizione (i) della definizione stessa, ha pur sempre una struttura di *ordine parziale*. In altre parole vi è definita una relazione che possiamo indicare con $<$ (che si legge "minore di") che soddisfa alla condizione (ii) della Definizione 1.5. Basta infatti stabilire che due elementi $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ di \mathfrak{C} sono in relazione se si verifica che $a_n < b_n$, per tutti i termini delle due successioni. Ovviamente non tutte le coppie di successioni sono confrontabili, non vale quindi la proprietà (i) della Definizione 1.5. Valgono però le seguenti proprietà:

O1. Se $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, e $\{c_n\}$ appartengono a \mathfrak{C} e $\{a_n\} < \{b_n\}$ allora $\{a_n + c_n\} < \{b_n + c_n\}$

O2. Se $0 < \{a_n\}$ e $0 < \{b_n\}$ allora $0 < \{a_n b_n\}$

A partire dall'anello con identità \mathfrak{C} , dobbiamo costruire una struttura che soddisfi anche all'assioma M5 del libro di Rudin (che sia cioè un campo), in cui valga la condizione (i) della Definizione 1.5 (e sia quindi un insieme ordinato), in cui valgano le proprietà O1 e O2 (sia quindi un campo ordinato) ed infine in cui valga la proprietà dell'estremo superiore.

A tale scopo introduciamo una relazione di equivalenza tra gli elementi di \mathfrak{C} . Diremo che due successioni di Cauchy, $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ di numeri razionali sono equivalenti, in simboli $\{a_n\} \sim \{b_n\}$, se $\lim_n (a_n - b_n) = 0$. Si osservi che la relazione introdotta è una relazione di equivalenza. Essa è infatti riflessiva ($a_n \sim a_n$), simmetrica (se $a_n \sim b_n$ allora $b_n \sim a_n$) e transitiva

(se $a_n \sim b_n$ e $b_n \sim c_n$ allora $a_n \sim c_n$). La transitività segue dal fatto che $|a_n - c_n| \leq |a_n - b_n| + |b_n - c_n|$.

Indichiamo con \mathbb{R} l'insieme delle classi di equivalenza della relazione di equivalenza \sim , cioè l'insieme \mathfrak{C}/\sim . Per la classe di equivalenza che contiene la successione di Cuchy $\{a_n\}$, utilizziamo la notazione $[a_n]$. Introduciamo però anche un'altra notazione presa a prestito dall'algebra.

Prima di definire le operazioni e la relazione di ordine su \mathbb{R} , introduciamo una classe di equivalenza speciale che consiste di tutte le successioni che convergono a zero. Indichiamo questa classe con \mathfrak{I} . Questa è la classe che contiene la successione identicamente nulla come pure tutte le successioni che sono nulle eccetto che per un numero finito di indici. La relazione di equivalenza $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ si può esprimere scrivendo $\{a_n - b_n\} \in \mathfrak{I}$. Questo significa che due successioni equivalenti differiscono per un elemento di \mathfrak{I} . Questo ci consente di indicare una classe di equivalenza con la notazione, $\{a_n\} + \mathfrak{I}$, in alternativa alla notazione $[a_n]$ introdotta prima. La nuova notazione chiarisce che l'insieme $[a_n] = \{a_n\} + \mathfrak{I}$ è l'insieme di tutte le successioni di Cauchy che si possono ottenere sommando un elemento di \mathfrak{I} alla successione a_n . Ovviamente, la successione a_n che compare in questa notazione può ben essere sostituita da un'altra successione appartenente alla stessa classe. In altre parole possiamo scegliere come *rappresentante* della classe $\{a_n\} + \mathfrak{I}$ qualsiasi successione $\{b_n\}$ che differisca da $\{a_n\}$ per un elemento di \mathfrak{I} . Per l'insieme \mathbb{R} si utilizza anche la notazione $\mathbb{R} = \mathfrak{C}/\mathfrak{I}$.

Veniamo ora alla definizione delle operazioni. Definiamo

$$(\{a_n\} + \mathfrak{I}) + (\{b_n\} + \mathfrak{I}) = (\{a_n + b_n\}) + \mathfrak{I}$$

e

$$(\{a_n\} + \mathfrak{I}) \cdot (\{b_n\} + \mathfrak{I}) = \{a_n \cdot b_n\} + \mathfrak{I}.$$

Dobbiamo ora verificare che queste definizioni non dipendono dai particolari rappresentanti delle classi a_n e b_n . Dobbiamo cioè verificare che se u_n e v_n sono elementi di \mathfrak{I} allora:

$$(\{a_n + u_n\} + \{b_n + v_n\}) + \mathfrak{I} = (\{a_n + b_n\}) + \mathfrak{I}$$

e

$$(\{a_n + u_n\}) \cdot (\{b_n + v_n\}) + \mathfrak{I} = \{a_n \cdot b_n\} + \mathfrak{I}.$$

La prima affermazione segue facilmente dal fatto che \mathfrak{I} è chiuso rispetto alla somma, pertanto $(a_n + b_n + u_n + v_n) \sim (a_n + b_n)$. Per la seconda affermazione abbiamo bisogno di una proprietà notevole dell'insieme \mathfrak{I} che è la seguente:

Il prodotto di un elemento di \mathfrak{C} e di un elemento di \mathfrak{I} appartiene a \mathfrak{I} .

Questa proprietà segue dal fatto che un elemento di \mathfrak{C} è necessariamente limitato ed il prodotto di una successione limitata per una successione che converge a zero converge necessariamente a zero.

Applicando questa proprietà si vede subito che

$$(a_n + u_n) \cdot (b_n + v_n) = a_n \cdot b_n + a_n \cdot v_n + u_n \cdot b_n + u_n \cdot v_n = a_n \cdot b_n + w_n,$$

dove $w_n \in \mathfrak{I}$. Pertanto $(a_n + u_n) \cdot (b_n + v_n) \sim a_n \cdot b_n$.

Gli studenti che hanno frequentato un insegnamento di algebra osserveranno che la proprietà di \mathfrak{I} che abbiamo evidenziato, assieme alla chiusura rispetto alle operazioni di somma e sottrazione, nella terminologia dell'algebra moderna, rendono il sottoinsieme \mathfrak{I} un *ideale* dell'anello commutativo con identità \mathfrak{C} . Gli altri studenti potranno ricordare questo esempio quando studieranno la teoria degli anelli, degli ideali, e dei campi. Si tratta anche di un ideale che non è propriamente contenuto in nessun altro ideale propriamente contenuto nell'anello. Si tratta cioè, nella terminologia dell'algebra moderna di un *ideale massimale*.

Non abbiamo ancora dimostrato che le operazioni così introdotte soddisfano agli assiomi da (A1) ad (A5) e da (M1) a (M4). Si tratta di una verifica facile, una volta chiarito che il ruolo dello zero è svolto dalla classe \mathfrak{I} che contiene la successione identicamente nulla, e che il ruolo di 1 è svolto dalla classe $1 + \mathfrak{I}$, che contiene la successione identicamente uno.

Ma vogliamo andare oltre, dimostrando che con queste operazioni risulta verificato anche l'assioma (M.5). Supponiamo infatti di avere un elemento non nullo di \mathbb{R} , in altre parole, una classe $\{a_n\} + \mathfrak{I}$ con $\{a_n\} \notin \mathfrak{I}$. Per la Proposizione 5, esiste un numero razionale *delta* tale che, eccetto che per un numero finito di indici $|a_n| > \delta$. Se cambiamo i valori di a_n in un numero finito di indici, restiamo certamente nella stessa classe $a_n + \mathfrak{I}$, infatti il cambiamento può essere effettuato aggiungendo una successione che vale zero eccetto che per un numero finito di indici. Possiamo perciò supporre che la disuguaglianza $|a_n| > \delta$ valga per tutti gli indici n . Definiamo a questo punto $b_n = a_n^{-1}$, e dimostriamo che $\{b_n\}$ è una successione di Cauchy. Infatti

$$|b_n - b_m| = \frac{|a_m - a_n|}{|a_n \cdot a_m|} < \frac{1}{\delta^2} |a_m - a_n|.$$

Da questa disuguaglianza e dal fatto che a_n è una successione di Cauchy si deduce facilmente che anche b_n è una successione di Cauchy. Pertanto, con le operazioni sopra definite,

$$(\{a_n\} + \mathfrak{I})(\{b_n\} + \mathfrak{I}) = \{1\} + \mathfrak{I}.$$

L'insieme $\mathbb{R} = \mathfrak{C}/\mathfrak{I}$ soddisfa quindi agli assiomi da (A1) ad (A5, da (M1) a (M5), e l'assioma D, ed è quindi un campo.

Passiamo ora agli assiomi relativi all'ordinamento. Dati due elementi $\{a_n\} + \mathfrak{I}$ e $\{b_n\} + \mathfrak{I}$, diremo che vale la condizione

$$a_n + \mathfrak{I} < b_n + \mathfrak{I},$$

se esistono $u_n \in \mathfrak{I}$ e $v_n \in \mathfrak{I}$ tali che

$$a_n + u_n < b_n + v_n.$$

Dimostriamo prima di tutto che è verificata la proprietà (i) della Definizione 1.5. Cioè che per ogni coppia di elementi di \mathbb{R} , $\{a_n\} + \mathfrak{I}$ e $\{b_n\} + \mathfrak{I}$ si verifica $\{a_n\} + \mathfrak{I} \leq \{b_n\} + \mathfrak{I}$ oppure $\{b_n\} + \mathfrak{I} \leq \{a_n\} + \mathfrak{I}$. (Abbiamo introdotto per comodità la notazione \leq che significa "minore o uguale"). Se $\{a_n - b_n\} \in \mathfrak{I}$, i due elementi scelti sono identici e non c'è nulla da dimostrare. Se invece $a_n - b_n \notin \mathfrak{I}$, si applica allora la Proposizione 5. In altre parole, eccetto che per un numero finito di indici $a_n - b_n \neq 0$ ed il segno di $a_n - b_n$ è costante. Cambiando, come è lecito, i valori delle successioni a_n e b_n per un numero finito di indici, si può ottenere che $a_n - b_n \neq 0$ e con segno costante. In altre parole o $a_n < b_n$ per tutti gli indici oppure $b_n < a_n$ per tutti gli indici. La verifica che \mathbb{R} soddisfa alla Definizione 1.17 segue dalla definizione della relazione $<$ per gli elementi di \mathbb{R} .

Rimane infine da verificare che \mathbb{R} soddisfa alla proprietà dell'estremo superiore. Questa è in effetti la verifica più impegnativa e significativa. Avremo bisogno di introdurre il concetto di *elemento razionale* di \mathbb{R} , secondo la seguente definizione.

Definizione 2 *Un elemento di \mathbb{R} si dice razionale se contiene una successione costante $a_n \equiv r$. Gli elementi razionali sono indicati con $\{r\} + \mathfrak{I}$ dove r è il valore razionale della successione costante.*

Esercizio 2 *Un elemento di \mathbb{R} non può contenere più di una successione costante.*

Abbiamo già incontrato elementi razionali, e cioè $\{0\} + \mathfrak{I} = \mathfrak{I}$ e $\{1\} + \mathfrak{I}$, che ci sono serviti per verificare gli assiomi di campo. Essi costituiscono, rispettivamente, lo zero e l'identità del campo \mathbb{R} . Possiamo osservare che tra gli elementi razionali ci sono quelli che si ottengono con somme ripetute dell'identità e del suo opposto $-1 + \mathfrak{I}$. Possiamo chiamare questi elementi *elementi interi* di \mathbb{R} , ed indicarli con $\{1\} + \mathfrak{I}$, $\{2\} + \mathfrak{I}$, $\{3\} + \mathfrak{I}$, ..., $\{k\} + \mathfrak{I}$, ..., con $k \in \mathbb{Z}$. E infatti ogni elemento razionale è il prodotto di un elemento intero per l'inverso di un elemento intero non nullo.

Lemma 7 *Se $\{a_n\} + \mathfrak{I} < \{b_n\} + \mathfrak{I}$ allora esiste un elemento razionale $\{r\} + \mathfrak{I}$ tale che,*

$$\{a_n\} + \mathfrak{I} < \{r\} + \mathfrak{I} < \{b_n\} + \mathfrak{I}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 5 esiste un numero razionale $\delta > 0$ tale che $b_n - a_n > \delta$ eccetto che per un numero finito di indici. Pertanto esiste un intero positivo N , tale che se $n, m \geq N$, risulta $b_n - a_n > \delta$, $|a_n - a_m| < \frac{\delta}{4}$ e $|b_n - b_m| < \frac{\delta}{4}$. Sia $r = a_N + \frac{\delta}{2}$. Allora se $n \geq N$,

$$r - a_n = a_N - a_n + \frac{\delta}{2} > -\frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{4},$$

e

$$b_n - r > a_n + \delta - a_N - \frac{\delta}{2} = a_n - a_N + \frac{\delta}{2} > -\frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{4}.$$

Questo basta a dimostrare che

$$a_n + \mathfrak{I} < r + \mathfrak{I} < b_n + \mathfrak{I}.$$

Indichiamo con \mathbb{Q} l'insieme degli elementi razionali di \mathbb{R} . Per convenienza ortografica indicheremo d'ora in avanti gli elementi di \mathbb{R} con lettere greche $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, riservando le lettere latine agli elementi di \mathbb{Q} . Dato che un razionale di \mathbb{R} considerato come classe di equivalenza di successioni, contiene un'unica successione costante identificata da un unico razionale, possiamo permetterci, senza temere di cadere in contraddizione, di identificare gli elementi razionali di \mathbb{R} con gli ordinari numeri razionali. E' quello che faremo nella dimostrazione del risultato che segue.

Teorema 8 *Il sistema \mathbb{R} soddisfa alla proprietà dell'estremo superiore. In altre parole dato un sottoinsieme non vuoto A e limitato di \mathbb{R} esiste il più piccolo tra i maggioranti di A .*

DIMOSTRAZIONE. Senza mancare di generalità possiamo supporre che A non possieda un massimo (l'elemento più grande). Altrimenti questo sarebbe il più piccolo dei maggioranti. Sia allora B l'insieme (non vuoto) dei maggioranti di A . Vogliamo dimostrare che B ammette un minimo. Possiamo anche supporre che A e B siano infiniti. Se A fosse finito avrebbe certamente un massimo e se B fosse finito avrebbe un minimo. In ambedue i casi avremmo trovato il minimo dei maggioranti. Definiamo ora A' come segue:

$$A' = \{a \in \mathbb{Q} : \exists \alpha, \alpha' \in A, \quad \alpha < a < \alpha'\}.$$

$$B' = \{b \in \mathbb{Q} : \exists \beta, \beta' \in B, \quad \beta < b < \beta'\}.$$

Analogamente definiamo $B' = \mathbb{Q} \cap B$, cioè B' è l'insieme dei maggioranti di A che sono razionali. Osserviamo che un numero reale è un maggiorante di A se e solo se è un maggiorante di A' . Osserviamo che A' e B' sono non vuoti, e che se $a \in A'$ e $b \in B'$ risulta sempre $a \leq b$. Vale inoltre il Lemma che segue.

Lemma 9 *Per ogni intero positivo n esistono $a_n \in A'$ e $b_n \in B'$ tali che $b_n - a_n < 1/n$.*

DIMOSTRAZIONE. Se la tesi non fosse vera esisterebbe un razionale $\delta > 0$ tale che, per ogni $a \in A'$ e $b \in B'$, risulta $b - a \geq \delta$. Scelti $a \in A'$ e $b \in B'$, sia k un intero positivo tale che $\frac{b-a}{k} < \delta$. Consideriamo i numeri razionali $x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{k}, x_2 = x_1 + \frac{b-a}{k}, \dots, x_k = x_{k-1} + \frac{b-a}{k} = b$. Sia j il più piccolo indice per il quale x_j risulta un elemento di B' (certamente $x_k \in B'$, d'altra parte se $j = 0$ allora a è un massimo per A'). Allora x_{j-1} non è un maggiorante di A' , e pertanto esiste $a' \in A'$ tale che $x_{j-1} < a' < x_j$. Ma abbiamo supposto che $x_j - a' \geq \delta > \frac{b-a}{k}$. Ne segue una contraddizione che dimostra la tesi.

Utilizziamo ora il Lemma che precede per costruire una successione di razionali a_n con la proprietà che per ogni n esiste un elemento $b_n \in B'$ tale che $b_n - a_n < 1/n$. Senza mancare di generalità possiamo supporre che la successione a_n sia non decrescente e la successione b_n sia non crescente. Osserviamo che a_n è una successione di Cauchy. Infatti se $\varepsilon > 0$ ed $n > 1/\varepsilon$, risulta per ogni p ,

$$a_{n+p} - a_n \leq b_n - a_n < 1/n < \varepsilon.$$

Anche b_n è una successione di Cauchy in quanto

$$b_n - b_{n+p} < b_n - a_n < 1/n.$$

Queste due successioni di Cauchy definiscono lo stesso elemento $\gamma = \{a_n\} + \mathfrak{I} = \{b_n\} + \mathfrak{I} \in \mathbb{R}$. Questo elemento γ è sicuramente un maggiorante di A' perché tutti i termini della successione b_n sono maggioranti di A' . Ma è anche vero che $\gamma = \{a_n\} + \mathfrak{I}$ e tutti i termini della successione a_n sono maggiorati da qualsiasi elemento $b \in B'$. Se ci fosse $\beta \in B$ con $\beta < \gamma$, allora esisterebbe un razionale b con $\beta < b < \gamma$. Ma questo razionale b sarebbe un elemento di B' , che implica $b \geq a_n$ per ogni n e quindi $b \geq \gamma$. Abbiamo dimostrato che γ è il più piccolo dei maggioranti di A' e quindi di A .