ANALISI MATEMATICA I

Soluzioni Scritto

17 giugno 2010

1.1. Esercizio. *Assegnata la funzione* $f(x) = e^{1-x^2}$

- *provare che* $f(x)$ *é dotata di integrale improprio su tutto* $\mathbb{R}$*,*
- *provare che anche* $x^2\, f(x)$ *é dotata di integrale improprio su tutto* $\mathbb{R}$*.*

SOLUZIONE:

Prima domanda:

Tenuto conto che $\forall t \geq 0: \quad e^t \geq 1 + t + \frac{1}{2}t^2 \geq 1 + \frac{1}{2}t^2$ riesce

$$\forall x \in \mathbb{R} : e^{x^2} \geq 1 + \frac{1}{2}x^4 \quad \to \quad e^{-x^2} \leq \frac{1}{1 + \frac{1}{2}x^4}$$

pertanto

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad e^{1-x^2} \leq \frac{e}{1 + \frac{1}{2}x^4} = \frac{2e}{2 + x^4}$$

Tenuto conto che riesce $2 + x^4 \geq 1 + x^2$ si ha quindi

$$e^{1-x^2} \leq \frac{2e}{1 + x^2}$$

Tenuto conto che la funzione $1/(1 + x^2)$ é dotata di integrale improprio su tutto $\mathbb{R}$, la maggiorazione stabilita prova, per confronto, che anche $f(x) = e^{1-x^2}$ é dotata di integrale improprio su tutto $\mathbb{R}$.
Si ha inoltre

$$\forall a < b : \quad \int_a^b e^{1-x^2}\, dx \leq 2e \int_a^b \frac{1}{1 + x^2} dx \leq 2e\pi$$

da cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{1-x^2}\, dx \leq 2e\pi$$

Seconda domanda:

Analogamente a sopra, osservato che

$$x^2 e^{1-x^2} \leq \frac{2ex^2}{2 + x^4} \leq \frac{4e}{1 + x^2}$$

si ha

$$x^2 e^{1-x^2} \leq \frac{4e}{1+x^2}$$

da cui, per confronto, l'integrabilitá di $x^2 e^{1-x^2}$ e la stima dell'integrale, analoga alla precedente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{1-x^2}\, dx \leq 4e\pi$$

1.2. Esercizio. *Assegnata la successione di funzioni*

$$f_n(x) = \sin\left(\frac{nx}{x+n}\right), \quad x \in [0,\pi] \quad n = 1, 2, 3, ..$$

- *esaminare se la successione converga puntualmente,*
- *esaminare se la successione converga, o meno, uniformemente in* $[0,\pi]$.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Osservato che

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{x+n} = x$$

e tenuto conto che la funzione $\sin(t)$ é continua riesce

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{nx}{x+n}\right) = \sin(x)$$

La convergenza osservata é del resto uniforme in $[0,\pi]$: infatti, tenuto conto della lipschitzianitá,

$$\forall x \in [0,\pi]: \quad \left|\sin\left(\frac{nx}{x+n}\right) - \sin(x)\right| \leq \left|\frac{nx}{x+n} - x\right| \leq \frac{\pi^2}{n}$$

da cui, assegnato $\varepsilon > 0$ riesce

$$\forall x \in [0,\pi]: \quad \left|\sin\left(\frac{nx}{x+n}\right) - \sin(x)\right| \leq \varepsilon$$

per

$$n \geq \frac{\pi^2}{\varepsilon}$$

1.3. Esercizio. *Detti $E_n \subset \mathbb{R}^2$ gli insiemi dei punti (x, y) che soddisfano la disuguaglianza*

$$|x + y| \leq \frac{1}{n}$$

- *esaminare se siano, o meno, compatti,*
- *esaminare se siano, o meno, aperti,*
- *determinare*
$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$
ed esaminare se sia, o meno, chiuso.

Soluzione:

Gli E_n sono le strisce di piano delimitate dalle due rette parallele

$$x + y = -\frac{1}{n} \qquad x + y = \frac{1}{n}$$

Si tratta di insiemi non limitati, pertanto non sono compatti.
Tenuto conto che gli E_n includono le due rette che li delimitano essi includono punti di frontiera: quindi gli E_n non sono aperti.
L'insieme $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, intersezione di tutte le strisce E_n é costituito dalla retta

$$x + y = 0$$

insieme chiuso del piano come si riconosce osservando come il complementare di E sia aperto.

1.4. Esercizio. *Assegnata l'equazione differenziale lineare di secondo ordine*

$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 8\sin(2x)$$

determinare

- *tutte le soluzioni dell'omogenea associata,*
- *tutte le soluzioni dell'equazione assegnata,*
- *la soluzione del problema di Cauchy relativo ai valori iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.*

Soluzione:

Le soluzioni $y_0(x)$ dell'omogenea si ricavano dalle radici dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \quad \to \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

$$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$$

Le soluzioni dell'equazione completa dipendono dalla determinazione di una soluzione particolare che, nel caso assegnato, si puó trovare nella forma

$$\overline{y}(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x)$$

Sostituendo si ottiene

$$A = -\frac{6}{5}, \quad B = -\frac{2}{5}$$

Tutte le soluzioni dell'equazione sono pertanto

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - \frac{6}{5}\sin(2x) - \frac{2}{5}\cos(2x)$$

La soluzione del problema di Cauchy assegnato é pertanto:

$$y(x) = \frac{16}{15}e^x - \frac{2}{3}e^{-2x} - \frac{6}{5}\sin(2x) - \frac{2}{5}\cos(2x)$$