ANALISI MATEMATICA I

Soluzioni Scritto

9 luglio 2010

2.1. Esercizio. *Assegnata la funzione*

$$f(x) \;=\; \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x-y|}}\,dy$$

- *calcolare* $f(0)$ *e* $f(1)$*,*
- *calcolare il limite* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$*,*
- *dire per quali* x *l'integrale a secondo membro é definito in senso classico e per quali é definito in senso improprio.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

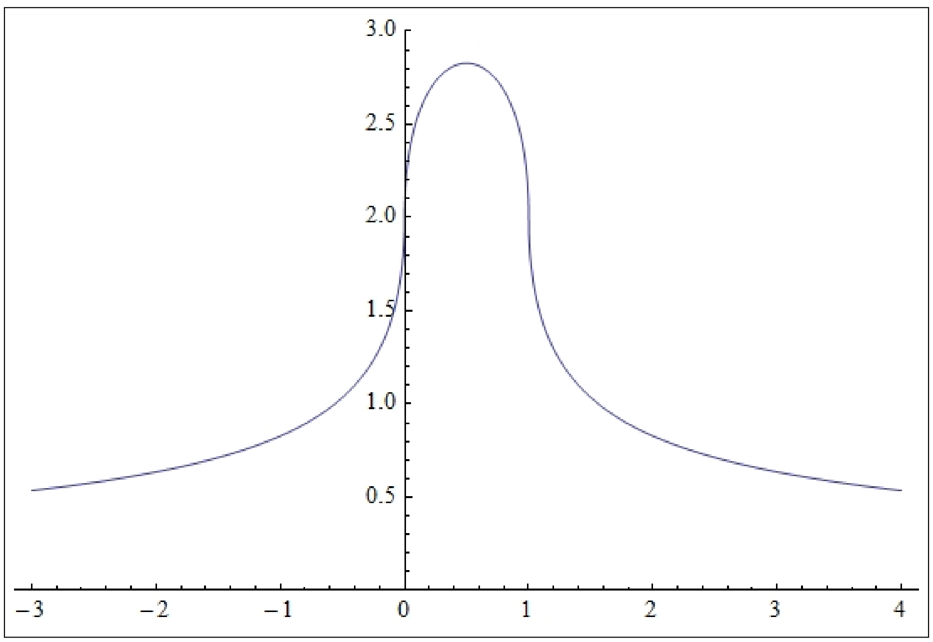

Figura 1. $f(x) \;=\; \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x-y|}}\,dy$

$$f(0) \;=\; \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|0-y|}}\,dy = \int_0^1 y^{-1/2}dy = 2\,\sqrt{y}\big|_0^1 = 2$$

$$f(1) \;=\; \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|1-y|}}\,dy = \int_0^1 (1-y)^{-1/2}dy = -2\,\sqrt{1-y}\Big|_0^1 = 2$$

Tenuto presente che

$$\forall y \in [0,1]: \quad x > M > 1 \quad \to \quad \frac{1}{\sqrt{|x-y|}} \le \frac{1}{\sqrt{M-1}}$$

si ha

$$0 \le f(x) \le \frac{1}{\sqrt{M-1}} \int_0^1 dy = \frac{1}{\sqrt{M-1}}$$

da cui, per il teorema dei carabinieri,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x-y|}}\, dy = 0$$

L'integrale che definisce $f(x)$

- é classico se $x \notin [0,1]$, cioé se $x < 0$ oppure $x > 1$
- é improprio se $x \in [0,1]$, ed esiste, appunto in senso improprio perché
$$\frac{1}{\sqrt{|x-y|}} = \frac{1}{|x-y|^{1/2}}$$
esponente minore di 1.

2.2. Esercizio. *Assegnata la successione di funzioni*

$$f_n(x) = \sin(\pi x^n), \quad x \in [0,1], \quad n = 1, 2, 3, ...$$

- *esaminare se la successione converga puntualmente,*
- *esaminare se la successione converga, o meno, uniformemente in* $[0,1]$.

SOLUZIONE:

La successione $\{\pi x^n\}$ converge puntualmente per $x \in [0,1]$ come segue

$$\lim_{n\to\infty} \pi x^n = \begin{cases} 0 & se \quad x \in [0,1) \\ \pi & se \quad x = 1 \end{cases}$$

Essendo $sin(t)$ una funzione continua ne segue quindi che

$$\forall x \in [0,1]: \quad \lim_{n\to\infty} \sin(\pi x^n) = \sin\left(\lim_{n\to\infty} \pi x^n\right) = 0$$

La convergenza tuttavia non é uniforme infatti nei punti

$$\xi_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \in [0,1]$$

riesce

$$\sin(\pi \xi_n^n) = \sin(\pi/2) = 1$$

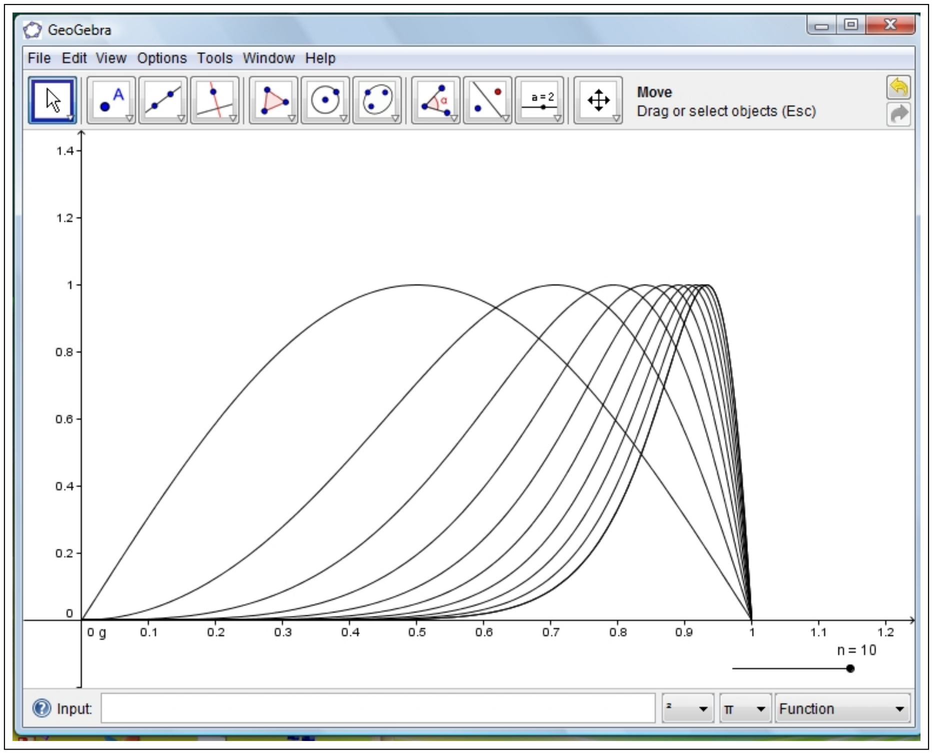

FIGURA 2. $f_n(x) = \sin(\pi x^n), \quad x \in [0,1], \quad n = 1, 2, 3, ...$

e quindi, evidentemente,

$$\max_{x\in[0,1]} |\sin(\pi x^n)| = 1$$

da cui riesce

$$\lim_{n\to\infty} \left(\max_{x\in[0,1]} |\sin(\pi x^n)| \right) = 1 \neq 0$$

La Figura 2 mostra chiaramente come i grafici delle funzioni $f_n(x)$ non siano affatto contenuti in un tubo intorno al grafico della funzione nulla, limite della successione.

2.3. Esercizio. *Detti $E_n \subset \mathbb{R}^2$ gli insiemi dei punti (x, y) che soddisfano la disuguaglianza*

$$\frac{1}{n} \leq x^2 + y \leq 1, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

- *esaminare se siano, o meno, compatti,*
- *determinare*

$$V = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

ed esaminare se sia, o meno, chiuso.

- *determinare*

$$W = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

ed esaminare se sia, o meno, chiuso.

SOLUZIONE:

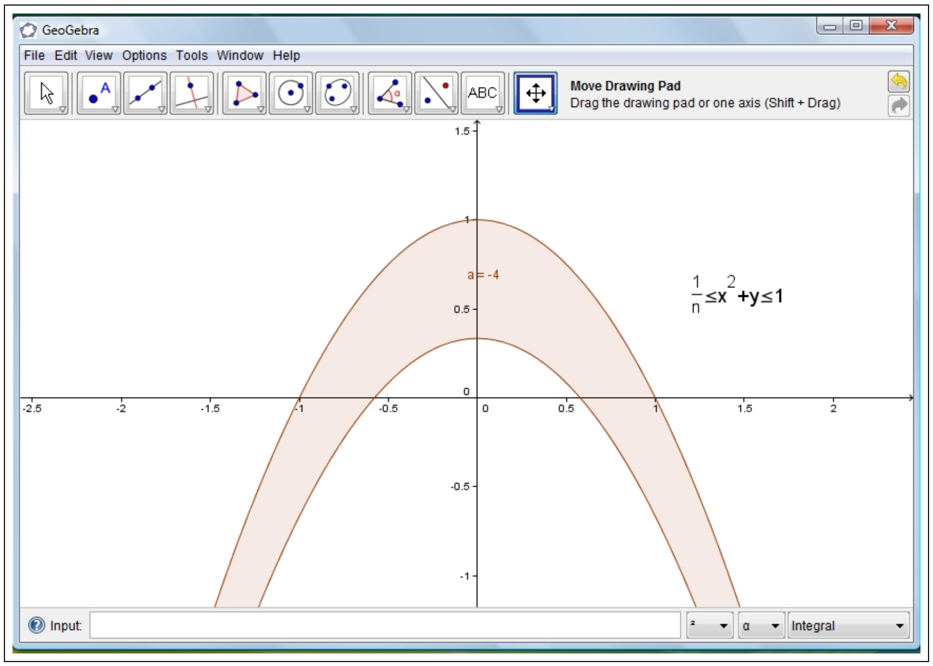

FIGURA 3. $E_3 : \left\{ \frac{1}{3} \leq x^2 + y \leq 1 \right\}$

Gli insiemi E_n sono la parte di piano delimitata dalle due parabole

$$x^2 + y = \frac{1}{n} \quad e \quad x^2 + y = 1$$

incluse le due curve: si tratta quindi di insiemi illimitati e chiusi, quindi non compatti.
Tenuto presente che

$$E_n \subset E_{n+1}$$

riesce

$$V = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = E_1 = \{y = 1 - x^2\}$$

insieme, come osservato sopra, chiuso e non limitato.

Riesce invece

$$W = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \{-x^2 < y \leq -x^2 + 1\}$$

insieme non limitato e non chiuso.

2.4. Esercizio. *Assegnata l'equazione differenziale lineare del primo ordine*

$$y' + 2xy = \frac{x}{1 + e^{x^2}}$$

- *tutte le soluzioni dell'omogenea associata,*
- *tutte le soluzioni dell'equazione assegnata,*
- *la soluzione del problema di Cauchy relativo al valore iniziale* $y(0) = \frac{1}{2}\log(2)$.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

L'equazione omogenea associata é

$$y' + 2xy = 0 \quad \rightarrow \quad y_0(x) = ce^{-x^2}$$

Una soluzione particolare dell'equazione completa si cerca nella forma $\overline{y}(x) = u(x).e^{-x^2}$: sostituendo nell'equazione si deve ottenere

$$\left(u(x).e^{-x^2}\right)' + 2xu(x).e^{-x^2} = \frac{x}{1 + e^{x^2}}$$

da cui

$$u'(x)e^{-x^2} = \frac{x}{1 + e^{x^2}} \quad \rightarrow \quad u'(x) = \frac{xe^{x^2}}{1 + e^{x^2}}$$

da cui

$$u(x) = \frac{1}{2}\log(1 + e^{x^2}) \quad \rightarrow \quad \overline{y}(x) = \frac{1}{2}e^{-x^2}\,\log(1 + e^{x^2})$$

Tutte le soluzioni dell'equazione assegnata sono pertanto

$$y(x) = y_0(x) + \overline{y}(x) = e^{-x^2}\left(c + \frac{1}{2}\log(1 + e^{x^2})\right)$$

La soluzione del problema di Cauchy assegnato é pertanto

$$y(0) = \frac{1}{2}\log(2) \quad \rightarrow \quad \left(c + \frac{1}{2}\log(1 + 1)\right) = \frac{1}{2}\log(2) \quad \rightarrow \quad c = 0$$

da cui

$$y(x) = e^{-x^2}\left(\frac{1}{2}\log(1 + e^{x^2})\right)$$