ANALISI MATEMATICA I

Soluzioni Foglio 1

12 marzo 2009

1.1. Esercizio*. [1] *Dimostrare che l'insieme di tutti i sottoinsiemi finiti dei numeri naturali è numerabile.*

Soluzione:

Sia S l'insieme di tutti i sottoinsiemi finiti dei numeri naturali: indichiamo con S_k l'insieme dei sottinsiemi di $\mathbb{N}$ formati da k elementi:

$$\begin{aligned} &S_1 = \mathbb{N} \\ &S_2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ &S_3 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

S_1 é, ovviamente, numerabile.
Il Teorema 2.13 del Rudin prova che ogni S_k é numerabile.
Il Teorema 2.12 prova che

$$S = \bigcup S_k$$

é numerabile.

1.2. Esercizio. *Dimostrare che l'insieme delle coppie (x, y) di numeri reali tali che $x^2 + y^2 = 1$, non è numerabile.*

Soluzione:

Indicato con 2π la lunghezza della circonferenza $\mathcal{C}$ facciamo corrispondere ad ogni punto $P \in \mathcal{C}$ il numero reale

$$\xi = \frac{1}{2\pi} \ell(A, P)$$

dove $A = (1, 0)$ e $\ell(A, P)$ indica la lunghezza dell'arco da A a P in senso antiorario.
Si riconosce quindi che $\mathcal{C}$ é in corrispondenza biunivoca con il segmento $[0, 1) \subset \mathbb{R}$ che, com'é noto non é numerabile: quindi neanche $\mathcal{C}$ puó essere numerabile.
Detta c la cardinalitá di $\mathbb{R}$ é noto che anche $[0, 1)$ ha cardinalitá c e, quindi anche $\mathcal{C}$ ha cardinalitá c.

[1] Gli esercizi asteriscati sono difficili: non angosciarsi troppo se non si riesce a risolverli !

1.3. Esercizio*. *Dimostrare che un sottoinsieme E di uno spazio metrico è aperto se e solo se ogni successione che converge ad un punto di E è definitivamente in E.*

Soluzione:

Qualunque teorema che includa l'espressione

se e solo se

richiede due dimostrazioni.
Nel nostro caso occorre dimostrare che

- **1.** se un sottoinsieme E di uno spazio metrico è aperto allora ogni successione che converge ad un punto di E è definitivamente in E,
- **2.** se ogni successione che converge ad un punto di E è definitivamente in E allora E é aperto.

Prima parte

Sia E aperto e sia $\{P_n\}$ una successione convergente

$$\lim_{n\to\infty} P_n = Q \in E$$

Sia $I(Q,\rho)$ un intorno circolare di Q tutto contenuto in E allora, per la definizione di successione convergente, esiste una soglia n_0 tale che per $n \geq n_0$ riesca

$$d(P_n, Q) \leq \rho \quad \to \quad P_n \in I(Q,\rho) \quad \to \quad P_n \in E$$

Seconda parte

Supponiamo, per assurdo, che E non sia aperto: cioé ci sia (almeno) un punto $Q \in E$ che sia *non interno* ad E, cioé sia tale che gli intorni

$$\forall n : \; I(Q, 1/n) \nsubseteq E$$

Questo vuol dire che

$$\forall n \;\; \exists P_n \in I(Q, 1/n) \quad \text{con} \quad P_n \notin E$$

Ma allora la successione $\{P_n\}$ sarebbe una successione

- che converge a $Q \in E$
- con termini che non appartengono definitivamente ad E

contrariamente all'ipotesi fatta che *ogni successione che converge ad un punto di E sia definitivamente in E* .
Quindi é assurdo ammettere, quando é soddisfatta tale ipotesi, che E sia *non aperto*.

1.4. Esercizio. *Dimostrare che un sottoinsieme E di uno spazio metrico è chiuso se e solo se ogni successione di punti di E che converge, converge ad un punto di E.*

Soluzione:

Prima parte:

Se ogni successione di punti di E che converge, converge ad un punto di E allora E é chiuso.
Sia $P_0 \in \mathcal{D}(E)$, allora

$$\forall n : \quad \exists Q_n \in I(P_0, 1/n) \cap E, \quad \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P_n = P_0$$

per l'ipotesi ammessa il punto P_0 essendo limite di una successione $\{P_n\} \in E$ convergente, appartiene ad E.
Quindi $\mathcal{D}(E) \subseteq E$ ovvero E é chiuso.

Seconda parte:

Se E é chiuso allora ogni successione di punti di E che converge, converge ad un punto di E.
Sia $\{P_n\} \in E$ convergente a P_0: ci sono due possibilitá per P_0

- o i termini P_n coincidono con P_0 da una certa soglia in poi, e quindi $P_0 \in E$
- oppure P_0 é punto di accumulazione per $\{P_n\} \subset E$ e quindi per E

Ma allora essendo E chiuso riesce, anche nel secondo caso, $P_0 \in E$.

1.5. Esercizio. *Dimostrare che ogni successione monotona e limitata di numeri reali converge.*

Soluzione:

(cfr. Rudin, pag. 52, Teorema 3.14)
Sia $\{x_n\} \in \mathbb{R}$ la successione: essendo limitata possiede estremo superiore

$$\Lambda = \sup_n x_n$$

Comunque si prenda $\varepsilon > 0$ il numero $\Lambda - \varepsilon$ é minore dell'estremo superiore e quindi non é piú un maggiorante, esiste cioé almeno un x_{n_ε} tale che

$$\Lambda - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \leq \Lambda$$

Tenuto conto che la successione é, per ipotesi, crescente riesce

$$x_{n_\varepsilon} \leq x_{n_\varepsilon+1} \leq x_{n_\varepsilon+2} \leq .... \leq \Lambda$$

Quindi tutti i termini x_n con $n \geq n_\varepsilon$ appartengono all'intervallo

$$[x_{n_\varepsilon},\ \Lambda]$$

e quindi riesce

$$\forall n\ \geq\ n_\varepsilon :\ \ |x_n - \Lambda| \leq \varepsilon$$

che esprime la relazione di limite

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \Lambda$$

1.6. Esercizio. *Dimostrare che ogni successione non decrescente e superiormente limitata di numeri razionali è di Cauchy.*
Provare a dimostrare questo enunciato restando nell'ambito dei soli razionali.

SOLUZIONE:

Nell'ambito dei soli numeri razionali manca l'assioma dell'estremo superiore, quindi puó mancare il numero

$$\Lambda = \sup_n\ x_n$$

che, come riconosciuto nell'esercizio precedente, esprime il limite della successione.
Quindi nell'ambito dei numeri razionali una successione non decrescente e superiormente limitata puó essere non convergente, cioé puó non avere limite.
Comunque nell'ambito dei numeri razionali una successione $\{x_n\}$ non decrescente e superiormente limitata é una successione di Cauchy.
Infatti

- consideriamo gli intervalli

  $$[x_1,\ x_1 + 1],\ [x_1 + 1,\ x_1 + 2],\ [x_1 + 2,\ x_1 + 3], ...$$

- sia $J_1 = [x_1{+}n{-}1,\ x_1{+}n]$ l'ultimo di tali intervalli che contiene punti della $\{x_n\}$, (questo accade prima o poi certamente perché abbiamo supposto che la $\{x_n\}$ sia superiormente limitata)
- dividiamo l'intervallo J_1 in 10 intervallini e chiamiamo J_2 l'ultimo di tali intervallini che contiene punti della $\{x_n\}$
- Iterando il procedimento veniamo a determinare la successione di intervallini

$$J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset ....$$

É facile riconoscere che

- gli intervallini J_k hanno lunghezze infinitesime

  $$\ell(J_k) = \frac{1}{10^k}$$

- ogni J_k contiene per costruzione tutti gli elementi della $\{x_n\}$ da un certo posto n_k in poi,

Quindi scelto $\varepsilon > 0$ sia k tale che

$$\frac{1}{10^k} \leq \varepsilon$$

si ha

$$\forall n \geq n_k : \; x_n \in J_k \quad \rightarrow \quad \forall p, q \geq n_k \; |x_p - x_q| \leq \frac{1}{10^k} \leq \varepsilon$$

1.7. Esercizio. *Dimostrare che un sottoinsieme connesso dei numeri reali è un intervallo, un punto, o una semiretta (intervalli generalizzati).*

Soluzione:

Su Rudin, pag. 40, teorema 2.47 si prova che i connessi $E \subseteq \mathbb{R}$ hanno la proprietá seguente

$$\left\{ \begin{array}{l} x, y \in E \\ x \leq z \leq y \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad z \in E \tag{1}$$

É evidente quindi che se E deve soddisfare tale requisito

- E puó avere solo un punto, circostanza nella quale la (1) non aggiunge nulla,
- E puó contenere piú di un punto ed essere limitato, allora, sempre per la (1), detti a e b i suoi estremi inferiore e superiore, si ha

$$E = [a,\, b], \quad \textit{oppure} \quad E = (a,\, b], \quad \textit{oppure} \quad E = [a,\, b), \quad \textit{oppure} \quad E = (a,\, b)$$

- E puó contenere piú di un punto ed essere non limitato inferiormente ma limitato superiormente, e allora sempre per la (1), detto b il suo estremo superiore si ha

$$E = (-\infty,\, b] \quad \textit{oppure} \quad E = (-\infty,\, b)$$

- E puó contenere piú di un punto ed essere limitato inferiormente ma illimitato superiormente, e allora sempre per la (1), detto a il suo estremo inferiore si ha

$$E = [a,\, +\infty) \quad \textit{oppure} \quad E = (a,\, +\infty)$$

- infine se E é illimitato sia inferiormente che superiormente, sempre per la (1), si ha $E = \mathbb{R}$.

1.8. Esercizio*. *Dimostrare che una funzione continua definita in uno spazio metrico e a valori in uno spazio metrico trasforma insiemi compatti in insiemi compatti. Dedurne il teorema che afferma che ogni funzione continua a valori reali definita su un compatto ammette massimo e minimo.*

Soluzione:

(cfr. Rudin, pag.86, Teorema 4.14)

1.9. Esercizio*. *Dimostrare che una funzione continua definita su uno spazio metrico e a valori in uno spazio metrico trasforma insiemi connessi in insiemi connessi. Dedurne il teorema degli zeri e/o il teorema che afferma che una funzione continua definita in un intervallo chiuso* $[a, b]$ *assume tutti i valori compresi tra* $f(a)$ *e* $f(b)$.

Soluzione:

(cfr. Rudin, pag.90, Teorema 4.22)

1.10. Esercizio*. *Dimostrare che una funzione continua definita su uno spazio metrico compatto è uniformemente continua. Dedurne il corrispondente teorema per le funzioni continue definite su un intervallo chiuso e limitato* $[a, b]$ *e a valori reali.*

Soluzione:

(cfr. Rudin, pag.88, Teorema 4.19)

1.11. Esercizio*. *Dimostrare che ogni spazio compatto è completo, ma che non tutti gli spazi completi sono compatti.*

Soluzione:

Uno spazio metrico si dice completo se tutte le successioni di Cauchy sono in esso convergenti (cfr. Rudin, pag.51, Definizione 3.12).
L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, con la sua naturale distanza, costituisce uno spazio completo.
L'insieme $\mathbb{R}$ tuttavia non é compatto, cioé non é vero che ogni successione $\{x_n\} \in \mathbb{R}$ ammetta qualche sottosuccessione convergente.
Si pensi, ad esempio alla successione $\{1, 2, 3, ...\}$ dei naturali.

1.12. Esercizio*. *Dimostrare che uno spazio non finito con la metrica discreta non è compatto.*

Soluzione:

Il nome di metrica discreta su uno spazio S é attribuito alla seguente scelta della distanza tra due punti dello spazio

$$d(P,Q) = \begin{cases} 0 & se \quad P = Q \\ 1 & se \quad P \neq Q \end{cases}$$

Nella metrica discreta gli interni circolari di ciascun punto $Q \in S$ sono sorprendenti

$$I(Q,\rho) = \begin{cases} Q & se \quad \rho < 1 \\ S & se \quad \rho \geq 1 \end{cases}$$

Pertanto le uniche successioni $\{P_n\} \in S$ convergenti sono quelle.... *definitivamente costanti* !
Infatti scelto $0 < \varepsilon < 1$ la condizione

$$\lim_{n\to\infty} P_n = Q \quad \to \quad d(P_n, Q) < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad P_n = Q$$

Basta quindi che lo spazio contenga infiniti punti per contenere successioni $\{P_n\}$ con

$$n \neq m \quad \to \quad P_n \neq P_m$$

e quindi non convergenti e non contenenti alcuna sottosuccessione convergente.

1.13. Esercizio. *A partire dagli assiomi di campo ordinato, dimostrare le seguenti proprietà di* $\mathbb{R}$*:*

(a) $a\,0 = 0 \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}$;
(b) $a\,b = 0 \implies a = 0$ oppure $b = 0$;
(c) $a \geq 0 \implies -a \leq 0$;
(d) $a \leq b\,,\ c < 0 \implies a\,c \geq b\,c$;
(e) $a^2 \geq 0 \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

- $a\,.\,0 = a\,.\,(b-b) = a\,.\,b - a\,.\,b = 0$
- $a\,.\,b = 0,\ a \neq 0 \quad \to \quad a^{-1}0 = a^{-1}a\,.\,b = b$
- $a \geq 0\ a - a \geq -a \implies\ 0 \geq -a$
- $a \leq b\,,\ c < 0 \implies a\,(-c) \leq b\,(-c) \to b\,c \leq acb$
- $a^2 \geq 0 \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}$: basta considerare i tre casi possibili

$$a = 0, a > 0, a < 0$$

1.14. Esercizio. *Dimostrare che se a e b sono numeri naturali maggiori di 1 e primi fra loro, allora il numero*

$$\frac{\lg a}{\lg b}$$

è irrazionale.

SOLUZIONE:

Supponiamo per assurdo che riesca

$$\frac{\lg(a)}{\lg(b)} = \frac{m}{n} \quad \rightarrow \quad n\lg(a) = m\lg(b) \quad \rightarrow \quad \lg(a^n) = \lg(b^m)$$

Ne seguirebbe

$$a^n = b^m$$

quindi a^n e b^m avrebbero gli stessi fattori primi.
Cosa impossibile in quanto

- i fattori di a^n sono tutti e soli i fattori di a
- i fattori di b^m sono tutti e soli i fattori di b
- a e b non hanno, per ipotesi fattori in comune.

1.15. Esercizio. *Dimostrare che se $a, x, b \in \mathbb{R}$ verificano*

$$a \leq x \leq a + \frac{b}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

allora $x = a$.

SOLUZIONE:

La condizione

$$a \leq x \leq a + \frac{b}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

puó aversi solo se $b \geq 0$
Riesce del resto

$$0 \leq x - a \leq \frac{b}{n}$$

e se, per assurdo, fosse $x \neq a$ allora avremmo, di conseguenza

$$\forall n : \quad n \leq \frac{b}{x-a}$$

contrariamente al fatto che l'insieme dei naturali $\{1, 2, 3, ...\}$ é illimitato superiormente.

1.16. Esercizio. *Sia A l'insieme costituito da tutte le possibili successioni a valori in $\{0,1\}$. Dimostrare che A non è numerabile.*

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

(cfr. Rudin, pag.28, teorela 2.14)

1.17. Esercizio. *Dimostrare che se $A \subset \mathbb{R}$ è limitato superiormente e $\sup A \notin A$, allora $\sup A$ è un punto di accumulazione di A. Dedurre che ogni insieme chiuso e limitato ha massimo e minimo.*

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Indichiamo con

$$\Lambda = \sup\ A$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ il numero $\Lambda - \varepsilon$ non é piú un maggiorante di A: esiste quindi $a_\varepsilon \in A$ tale che

$$\Lambda - \varepsilon < a_\varepsilon \leq \Lambda$$

ovvero

$$\forall \varepsilon > 0 : \ \ \exists a_\varepsilon \in A \ \ |\Lambda - a_\varepsilon| \leq \varepsilon$$

Possono succedere due cose

- o $a_\varepsilon = \Lambda$
- oppure $a_\varepsilon \neq \Lambda$

La prima possibilitá contraddice l'ipotesi $\sup A \notin A$: quindi non puó che verificarsi la seconda, la quale equivale a riconoscere che Λ é un punto di accumulazione per A.
Analogo discorso si puó fare se A é un insieme limitato inferiormente e se riesce $\inf A \notin A$.
Tenuto conto quindi che in relazione ad un insieme limitato A gli estremi $\inf A$ e $\sup A$ o appartengono all'insieme o sono suoi punti di accumulazione, si riconosce che se A é chiuso riesce in ogni caso

$$\inf A \in A, \qquad \sup A \in A$$

e quindi si riconosce che un insieme A chiuso e limitato ammette sempre minimo e massimo.

1.18. Esercizio. *Dimostrare che, se $A \subset \mathbb{R}$,*

$$\mathcal{D}(A) \setminus A = \partial A \setminus A.$$

avendo indicato con $\mathcal{D}(A)$ l'insieme dei punti di accumulazione di A.

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

L'uguaglianza $E = F$ tra due insiemi si prova dimostrando le due inclusioni $E \subseteq F$ e $F \subseteq E$.
Cominciamo con la inclusione $\mathcal{D}(A) \setminus A \subseteq \partial A \setminus A$:

sia $P_0 \in \mathcal{D}(A) \setminus A$, cioé $P_0 \in \mathcal{D}(A)$ e $P_0 \notin A$: le due condizioni implicano che in ogni intorno $I(P_0, \rho)$ cadono punti, quali P_0 stesso che non appartengono ad A e cadono punti di A.
Quindi in ogni $I(P_0, \rho)$ cadono punti di A e non di A, quindi $P_0 \in \partial A$: dalla condizione $P_0 \notin A$ discende

$$P_0 \in \partial A \setminus A$$

La seconda inclusione $\partial A \setminus A \subseteq \mathcal{D}(A) \setminus A$ si riconosce analogamente: sia $P_0 \in \partial A \setminus A$ allora in ogni $I(P_0, \rho)$ cadono punti, quali P_0 stesso che non appartengono ad A e cadono punti di A quindi P_0 é di accumulazione per A e non appartiene ad A, quindi

$$P_0 \in \mathcal{D}(A) \setminus A$$

Le due inclusioni provate

$$\mathcal{D}(A) \setminus A \subseteq \partial A \setminus A, \qquad \partial A \setminus A \subseteq \mathcal{D}(A) \setminus A$$

implicano l'uguaglianza

$$\partial A \setminus A = \mathcal{D}(A) \setminus A$$

1.19. Esercizio. *Dimostrare che se $A \subset \mathbb{R}$ non ha punti di frontiera, allora $A = \emptyset$ oppure $A = \mathbb{R}$.*

SOLUZIONE:

Se $A = \emptyset$ oppure se $A = \mathbb{R}$ é evidente che non ci possono essere punti di frontiera.
Se A non rientra in nessuno dei due casi precedenti allora esistono almeno due punti

$$x \in A, \qquad y \notin A$$

Sia

$$E = A \cap [x, y]$$

E é superiormente limitato: sia $\Lambda = \sup E$: riesce $\Lambda \leq y$ e riesce punto di frontiera di A.
Infatti

- se $\Lambda = y$ allora
$$\forall \varepsilon > 0 : \ \exists x_\varepsilon \in A \quad \Lambda - \varepsilon < x_\varepsilon \leq \Lambda$$
quindi in ogni intorno di Λ cadono punti $x_\varepsilon \in A$ e punti $y \notin A$
- se $\Lambda < y$ allora
$$\forall \varepsilon > 0 : \ \exists x_\varepsilon \in A \quad \Lambda - \varepsilon < x_\varepsilon \leq \Lambda$$
e tutti i punti $z \in (\Lambda, y]$ non appartengono ad A: quindi in ogni intorno di Λ cadono punti $x_\varepsilon \in A$ e punti $z \notin A$