ANALISI MATEMATICA I

Soluzioni Foglio 10

31 maggio 2010

10.1. Esercizio. *Assegnata la funzione*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{x-k}$$

- *determinare in quali intervalli (limitati o illimitati) é integrabile (in senso classico o improprio),*
- *determinare in quali intervalli (limitati o illimitati) é integrabile $f^2(x)$.*

SOLUZIONE:

La funzione $f(x)$ é definita e continua in $\mathbb{R} - \{1, 2, 3\}$: quindi é integrabile in senso classico in ogni intervallo chiuso e limitato che non contenga i tre punti proibiti.
In ogni intervallo chiuso e limitato che abbia un estremo in uno di tali tre punti la funzione non é integrabile né in senso classico né in senso improprio.
Quindi la $f(x)$ non é integrabile in nessun intervallo limitato che includano (all'interno o a un estremo) qualcuno dei punti proibiti.
La $f(x)$ non é integrabile in alcuna semiretta $[M, +\infty)$ o $(-\infty, M]$: infatti

$$\int_M^{\pm n} f(x)dx = \mathcal{O}(\log(|n|))$$

naturalmente riferendosi a intervalli $[M, n]$ che non includa alcuno dei punti proibiti.
Per quanto riguarda la funzione $f^2(x)$

- resta la non integrabilitá di $f^2(x)$ in qualsiasi intervallo limitato che includa (all'interno o a un estremo) punti proibiti,
- riesce integrabile $f^2(x)$ in ogni semiretta che non includa (all'interno o a un estremo) punti proibiti, infatti riesce

$$f^2(x) \leq \frac{M}{x^2}$$

10.2. Esercizio. *Assegnata la funzione*

$$f(x) = (x^2 - 5x + 6)e^{-(x^2-5x+6)}$$

- *determinare in quali intervalli (limitati o illimitati) é integrabile (in senso classico o improprio),*
- *determinare in quali intervalli (limitati o illimitati) é integrabile $f^2(x)$.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La funzione $f(x)$ é continua in $\mathbb{R}$: quindi é integrabile in senso classico in ogni intervallo limitato.
É anche integrabile in senso improprio in ogni semiretta $[M, +\infty)$ o $(-\infty, M]$: infatti

$$e^{|x|} \geq 1 + |x| + \frac{1}{2}|x|^2 \geq \frac{1}{2}|x|^2 \quad \to \quad |f(x)| \leq 2\frac{1}{|x^2 - 5x + 6|}$$

disuguaglianza che di fatto prova che

$$|f(x)| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

da cui la integrabilitá sulle semirette.
Risultati analoghi per $f^2(x)$: continua, quindi integrabile in ogni intervallo limitato.
Integrabile in ogni semiretta in quanto

$$|f(x)| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \to \quad |f(x)|^2 = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

10.3. Esercizio. *Assegnata la serie di potenze*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{\sqrt{n}}}{n} x^n, \quad x \in \mathbb{R}$$

- *determinare l'intervallo di convergenza,*
- *detta $f(x)$ la somma di tale serie verificare la disuguaglianza*

$$|f(x)| \leq \frac{1}{1 - 3|x|}$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Servendosi del rapporto

$$\frac{\left|\dfrac{3^{\sqrt{n+1}}}{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|\dfrac{3^{\sqrt{n}}}{n}x^{n}\right|} = \frac{n}{n+1}3^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}|x| \to |x|$$

si riconosce che la serie converge, assolutamente, per $|x| < 1$ e non converge per $|x| > 1$.
Nei due estremi -1, $+1$ la serie non converge perché, come si riconosce dalla seguente disuguaglianza,

$$\frac{3^{\sqrt{n}}}{n} = \frac{e^{\log(3)\sqrt{n}}}{n} \geq \frac{\frac{1}{2}\log^2(3)\,n}{n} = \frac{1}{2}\log^2(3) > 0$$

i suoi termini non sono infinitesimi.
Per quanto riguarda la maggiorazione per la somma essa discende dalla ovvia disuguaglianza

$$\left|\frac{3^{\sqrt{n}}}{n}x^n\right| \leq 3^n|x|^n$$

che implica, per $|x| < \dfrac{1}{3}$

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{\sqrt{n}}}{n}x^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty}(3|x|)^n = \frac{1}{1-3|x|}$$

10.4. Esercizio. *Assegnata la serie di funzioni*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(x^{2k} - x^{2k+2}\right)$$

- *determinare l'insieme di convergenza,*
- *determinare la successione delle somme parziali* $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\left(x^{2k} - x^{2k+2}\right)$,
- *determinare la somma della serie.*

SOLUZIONE:

La serie assegnata ha gli addendi

$$x^{2k} - x^{2k+2} = (1-x^2)x^{2n} \quad \to \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left(x^{2k} - x^{2k+2}\right) = (1-x^2)\sum_{k=1}^{\infty}x^{2k}$$

con raggio di convergenza $\rho = 1$

Tenuto conto del resto che agli estremi -1, $+1$ dell'intervallo di convergenza gli addendi

$$x^{2k} - x^{2k+2}$$

sono nulli, si riconosce che l'insieme di convergenza della serie assegnata é l'intervallo $[-1,\ +1]$ estremi inclusi.
La successione delle somme parziali

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(x^{2k} - x^{2k+2}\right) = (x^2-x^4)+(x^4-x^6)+\ldots+(x^{2n}-x^{2n+2}) = x^2-x^{2n+2}$$

La somma della serie, limite delle somme parziali $S_n(x) = x^2 - x^{2n+2}$ é pertanto

$$S(x) = \begin{cases} x^2 & se \quad |x| < 1 \\ 0 & se \quad |x| = 1 \end{cases}$$

10.5. Esercizio. *Assegnata la successione*

$$f_n(x) = n^2\, x\, e^{-nx}, \quad x \geq 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

- *determinare l'insieme E in cui é convergente,*
- *determinare la successione*

$$M_n = \sup_{x \geq 0} |f_n(x)|$$

- *determinare in quali intervalli la successione $\{f_n(x)\}$ risulta uniformemente convergente.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Tenuto conto che

$$\forall x > 0 : ,\ e^{nx} \geq 1+nx+\frac{1}{2}n^2x^2+\frac{1}{6}n^3x^3 \quad \to \quad f_n(x) \leq \frac{n^2x}{\frac{1}{6}n^3x^3} = \frac{6}{nx^2} \to 0$$

tenuto conto inoltre che $f_n(0) = 0$ si riconosce che

$$\forall x \geq 0 : \ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

Considerate le derivate

$$f_n'(x) = n^2 e^{-nx}(1 - nx) \quad \to \quad \begin{cases} f_n'(x) \geq 0 & se \quad x < \dfrac{1}{n} \\[2ex] f_n'(x) \leq 0 & se \quad x > \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

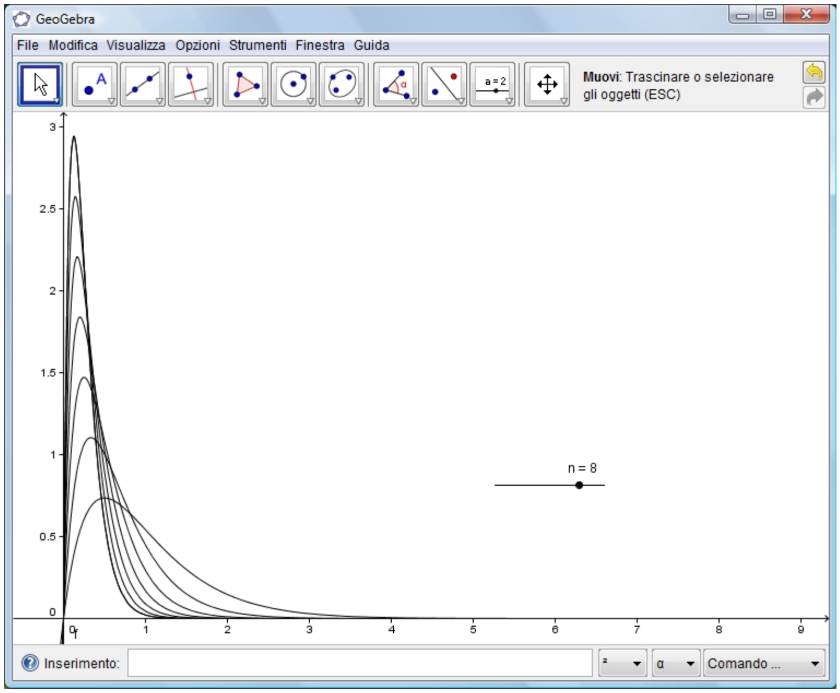

FIGURA 1. $f_n(x) = n^2\, x\, e^{-nx}, \quad x \geq 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

si riconosce che

$$M_n = \sup_{x \geq 0} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = ne^{-1}$$

Tenuto conto che

$$\lim_{n \to \infty} M_n \neq 0$$

si riconosce che la successione $\{f_n(x)\}$ non converge uniformemente nella semiretta $x \geq 0$.
Tenuta presente tuttavia la disuguaglianza precedente

$$f_n(x) \leq \frac{6}{nx^2}$$

si riconosce che la successione converge uniformemente in ogni semiretta $[a, +\infty)$ con $a > 0$: infatti

$$\forall x \in [a, +\infty): \quad f_n(x) \leq \frac{6}{na^2}$$

10.6. Esercizio. *Assegnata la successione*

$$f_n(x) = \arctan\left(|x-n|\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, 3 \ldots.$$

- *determinare l'insieme E in cui é convergente,*
- *determinare la successione*

$$M_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)|$$

- *determinare in quali intervalli la successione $\{f_n(x)\}$ risulta uniformemente convergente.*

SOLUZIONE:

La successione $f_n(x) = \arctan\left(|x-n|\right)$ converge in tutto $\mathbb{R}$: infatti qualunque sia $x_0 \in \mathbb{R}$ riesce

$$\lim_{n\to\infty} |x_0 - n| = +\infty \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} \arctan\left(|x_0-n|\right) = \frac{\pi}{2}$$

Riesce

$$M_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{t \geq 0} \arctan(t) = \frac{\pi}{2}$$

Considerato che per ogni n riesce $f_n(n) = 0 \neq \pi/2$ si ha che la successione $\{f_n(x)\}$ non puó convergere uniformemente al limite

$$f(x) = \frac{\pi}{2}$$

La successione tuttavia converge uniformemente in ogni semiretta $(-\infty, a]$: infatti per $n > a$ riesce

$$\left|f_n(x) - \frac{\pi}{2}\right| = \left|\arctan(|a-n|) - \frac{\pi}{2}\right| \to 0$$

10.7. Esercizio. *Assegnata l'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea*

$$y' + y = xe^x \sin(2x)$$

- *determinare le soluzioni dell'omogenea associata,*
- *determinare tutte le soluzioni dell'equazione assegnata,*
- *determinare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 0$*

SOLUZIONE:

Le soluzioni dell'omogenea associata $y' + y = 0$ sono

$$y_0(x) = ce^{-x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Cerchiamo una soluzione dell'equazione non omogenea nella forma

$$\overline{y}(x) = u(x)e^{-x}$$

Sostituendo si ottiene

$$u'e^{-x} - ue^{-x} + ue^{-x} = xe^x \sin(2x) \quad \to \quad u'(x) = xe^{2x}\sin(x)$$

Integrando si ottiene

$$u(x) = -\frac{1}{25}e^{2x}((3-10x)\sin(x) + (5x-4)\cos(x))$$

da cui

$$\overline{y}(x) = -\frac{1}{25}e^{x}((3-10x)\sin(x) + (5x-4)\cos(x))$$

Tutte le soluzioni dell'equazione assegnata sono pertanto

$$y(x) = y_0(x) + \overline{y}(x) = ce^{-x} - \frac{1}{25}e^{x}\left((3-10x)\sin(x) + (5x-4)\cos(x)\right)$$

La soluzione del problema di Cauchy assegnato corrisponde alla scelta

$$c = -\frac{4}{25}$$

10.8. Esercizio. *Assegnata l'equazione differenziale lineare del secondo ordine, a coefficienti costanti, non omogenea,*

$$y'' + y' - 2y = 8\sin(2x)$$

- *determinare le soluzioni dell'omogenea associata,*
- *determinare tutte le soluzioni dell'equazione assegnata,*
- *determinare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali*

$$y(0) = 0, y'(0) = 0$$

SOLUZIONE:

Le soluzioni dell'omogenea associata dipendono dalle radici dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \quad \to \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

esse sono pertanto

$$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$$

Una soluzione particolare dell'equazione completa si trova nella forma

$$\overline{y}(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x)$$

Sostituendo si perviene al sistema per A, B

$$\begin{cases} -6A - 2B = 8 \\ 2A - 6B = 0 \end{cases} \quad \to \quad A = \frac{6}{5}, \;\; B = -\frac{2}{5}$$

Tutte le soluzioni dell'equazione completa sono pertanto

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \frac{6}{5}\sin(2x) - \frac{2}{5}\cos(2x)$$

La soluzione che le condizioni iniziali $y(0) = 0, y'(0) = 0$ é pertanto quella con le seguenti costanti c_1, c_2:

$$c_1 = \frac{16}{15}, \quad c_2 = -\frac{10}{15}$$