ANALISI MATEMATICA I

Soluzioni Scritto

17 settembre 2010

3.1. Esercizio. *Assegnata l'equazione differenziale*

$$y'(x) + \cos(x)\, y(x) = \cos(x)$$

- *determinare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale* $y(0) = 2$,
- *determinare per quali* A *la soluzione* $y(x)$ *che soddisfa la condizione iniziale* $y(0) = A$, *verifica l'equazione*

$$y(0) = y(1)$$

SOLUZIONE:

Le soluzioni dell'equazione differenziale sono somma delle soluzioni dell'omogenea

$$y_0(x) = c\, e^{-\sin(x)}$$

e di una soluzione particolare

$$\overline{y}(x) = 1$$

dell'equazione completa. Pertanto esse sono le funzioni

$$y(x) = c\, e^{-\sin(x)} + 1, \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

La soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 2$ é quindi

$$y(x) = e^{-\sin(x)} + 1$$

Tenuto conto che la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = A$ é

$$y(x) = (A - 1)e^{-\sin(x)} + 1$$

affinché sia soddisfatta la condizione $y(0) = y(1)$ occorre che

$$A = (A-1)e^{-\sin(x)} + 1 \quad \to \quad A = (A-1)e^{-\sin(x)} + 1 \quad \to \quad A = 1$$

L'unica soluzione dell'equazione differenziale assegnata che assuma in $x = 0$ e in $x = 1$ lo stesso valore é quindi la soluzione d'equilibrio

$$\overline{y}(x) = 1$$

precedentemente trovata come soluzione particolare.

3.2. Esercizio. *Data la funzione*

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{|t-2|\sqrt{|t-1|}} dt$$

- *determinare l'insieme E degli x per i quali l'integrale e' definito, in senso classico o improprio,*
- *stabilire se f é o meno continua in E,*
- *stabilire se f é o meno uniformemente continua in E.*

SOLUZIONE:

La funzione integranda ha limite infinito sia in 1 che in 2: é quindi integrabile in senso classico in ogni intervallo $[0, x]$ che non includa nessuno dei due punti.

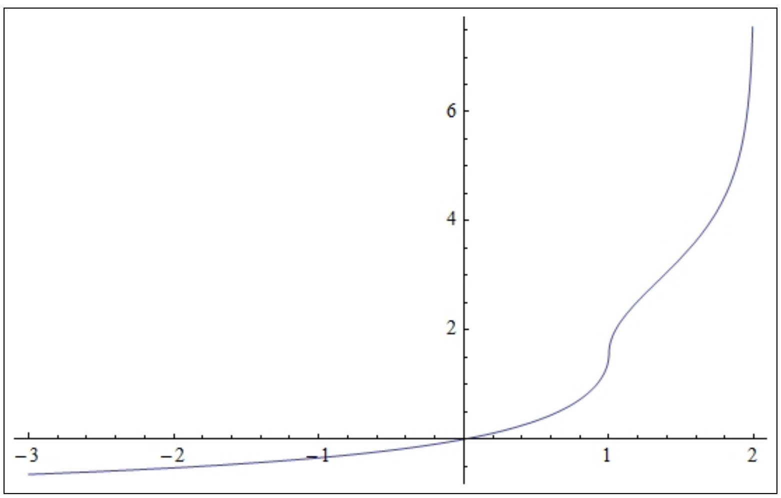

FIGURA 1. $f(x) = \int_0^x \frac{1}{|t-2|\sqrt{|t-1|}} dt, \quad x \in (-\infty, 2)$

Tenuto presente che nel punto $t = 1$ la funzione integranda diverge solo come

$$\frac{1}{|t-1|^{1/2}}$$

allora l'integrale esiste in senso improprio anche in ogni intervallo $[0, x]$ che non includa il solo punto $t = 2$.
Pertanto riesce

$$E := \{x < 2\}$$

La funzione $f(x)$ é definita in $E := \{x < 2\}$ ed é

- ovviamente continua in ogni punto $x_0 \in E$ con $x_0 \neq 1$, infatti

$$|f(x_0+h) - f(x_0)| \leq \left| \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{1}{|t-2|\sqrt{|t-1|}} dt \right| \leq M|h|$$

essendo M un maggiorante della funz. integranda in $[x_0, x_0+h]$
- é continua anche nel punto $x_0 = 1$, infatti

$$|f(1+h)-f(1)| \leq \left| \int_{1}^{1+h} \frac{1}{|t-2|\sqrt{|t-1|}} dt \right| \leq M \int_0^{|h|} \frac{1}{t^{1/2}} dt = 2\frac{\sqrt{|h|}}{1-|h|}$$

La funzione $f(x)$ non é uniformemente continua in E: se lo fosse dovrebbe ammettere limite finito in 2, mentre riesce

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$$

3.3. Esercizio. *Assegnata per $x \in [0,1]$ la successione di funzioni*

$$f_n(x) = \begin{cases} n & se \quad x \in [0, \frac{1}{n^2}) \\ \\ \frac{1}{nx} & se \quad x \in [\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}) \\ \\ 1 & se \quad x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

- *determinare l'insieme di convergenza e il limite puntuale,*
- *stabilire se la convergenza e' uniforme.*

SOLUZIONE:

La successione assegnata non converge nel punto $x = 0$ infatti riesce

$$f_n(0) = n, \quad \lim_{n \to \infty} f_n(0) = +\infty$$

La successione converge invece in ogni punto $x_0 \in (0,1]$: infatti riesce definitivamente

$$x_0 \in [\frac{1}{n}, 1] \quad \to \quad f_n(x_0) = 1$$

Pertanto l'insieme di convergenza é $(0,1]$ e il limite puntuale in tale insieme é la funzione costante $f(x) = 1$.
La convergenza della successione $\{f_n(x)\}$ in $(0,1]$ non é uniforme: infatti la successione di estremi superiori

$$\sup_{x \in (0,1]} |f_n(x) - f(x)| = n - 1$$

non é infinitesima.

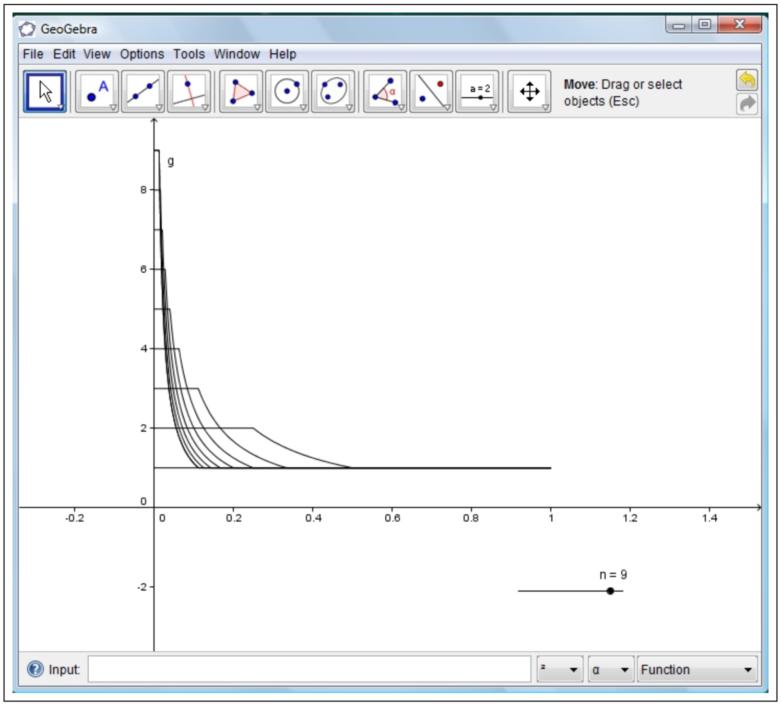

FIGURA 2. $f_n(x), \quad x \in [0,1], \quad n = 1, 2, ..., 8$

3.4. Esercizio. *Indicati con*

$$E_n := \begin{cases} x^2 + y^2 \leq \pi \\ \sin^n(x^2 + y^2) > \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

gli insiemi dei punti (x, y) *del piano che soddisfano il sistema*

- *disegnare l'insieme* E_1*,*
- *esaminare se gli insiemi* E_n *sono compatti,*
- *determinare l'intersezione*

$$F = \bigcap_n E_n$$

Soluzione:

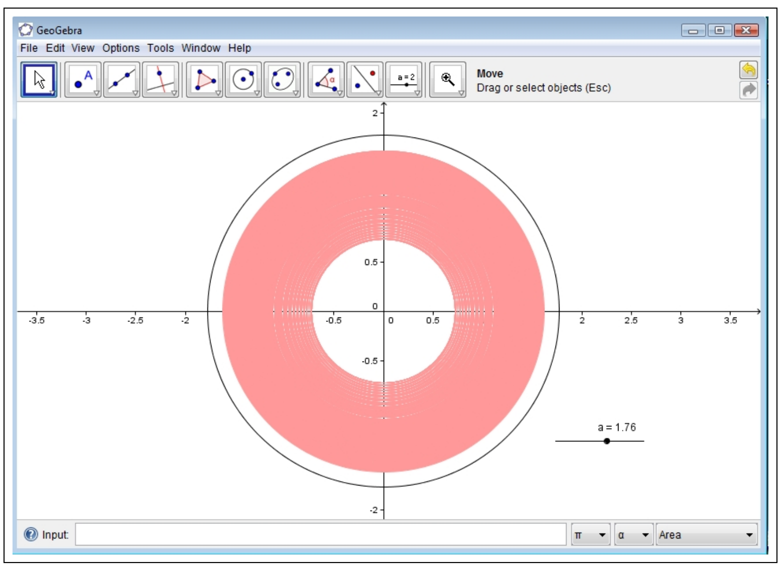

Figura 3. La corona circolare E_1

L'insieme E_1 é la corona circolare

$$\alpha < x^2 + y^2 < \pi - \alpha$$

essendo $\sin(\alpha) = 1/2$.
Gli insiemi E_n sono aperti: quindi non sono compatti.
L'intersezione F é la circonferenza

$$x^2 + y^2 = \frac{\pi}{2}$$