ANALISI MATEMATICA I

Soluzioni Foglio 2

19 marzo 2009

2.1. Esercizio. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^2 : \ \{(x, y) : \ 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$

- *esaminare se* Ω *sia aperto, chiuso o nessuno dei due,*
- *determinare la frontiera* $\partial\Omega$ *di* Ω*,*
- *scelto* $P = (\alpha, \beta) \in \Omega$ *determinare, se possibile, il raggio* $\rho > 0$ *tale che l'intorno circolare* $I(P, \rho)$ *sia contenuto in* Ω*,*
- *esaminare se sia vero che tutte le successioni* $\{P_n\} \subset \Omega$ *contengano sottosuccessioni convergenti in* Ω*.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

L'insieme Ω assegnato é il cerchio di centro l'origine, raggio $\rho = 1$, circonferenza inclusa ma privato del centro $O = (0, 0)$.
Pertanto

- – non é aperto: lo testimoniano i punti della circonferenza che appartengono a Ω ma non sono interni ad Ω,
  – non é chiuso: lo testimonia il punto $O = (0, 0)$ certamente di accumulazione per Ω ma non appartenente a Ω.

  L'insieme Ω costituisce quindi un esempio di insieme

  $$\Omega \neq \overset{\circ}{\Omega}, \qquad \mathcal{D}(\Omega) \nsubseteq \Omega$$

  né aperto né chiuso.
- la frontiera $\partial\Omega$ di Ω, insieme dei punti del piano che non sono né interni né esterni ad Ω é formata dai punti della circonferenza che delimita Ω e dal centro $O = (0, 0)$:

  $$\partial\Omega = \{x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0, 0)\}$$

  Si puó riconoscere infatti che se $P_0 = (x_0, y_0) \in \partial\Omega$ gli intorni circolari $I(P_0, r)$, $r > 0$ intersecano sempre sia Ω che $\mathcal{C}(\Omega)$
- Se $P = (\alpha, \beta)$ é un punto di Ω allora

  $$0 < \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = R \leq 1$$

  pertanto
  – se $R = 1$, il punto P appartiene alla circonferenza che delimita Ω e non c'é alcun intorno circolare $I(P, \rho)$ contenuto in Ω,

– se $R < 1$, preso

$$\rho = \min\{R, 1-R\}$$

l'intorno circolare $I(P, \rho)$ é interamente contenuto in Ω.

- Non é vero che ogni successione $\{P_n\} \subset \Omega$ abbia sottosuccessioni convergenti in Ω: basta pensare alla successione

$$P_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right), \qquad n = 2, 3, 4, \ldots$$

convergente in $\mathbb{R}^2$ a $O = (0,0) \notin \Omega$.

Tutte le sue sottosuccessioni convergono naturalmente ancora a $O = (0,0) \notin \Omega$, quindi non convergono in Ω.

Del resto la proprietá di un insieme E di essere tale che tutte le successioni $\{Q_n\} \subset E$ abbiano sottosuccessioni convergenti in E si chiama compattezza: sappiamo che in $\mathbb{R}^2$ gli insiemi compatti sono tutti e soli gli insiemi chiusi e limiatati e abbiamo precedentemente riconosciuto che Ω non é chiuso.

2.2. Esercizio. *Sia $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali, indichiamo con D l'insieme*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\,,\ y \in [0,1]\}$$

- *disegnare D,*
- *stabilire se D é chiuso, aperto, compatto, connesso,*
- *determinare l'interno $\overset{\circ}{D}$, la frontiera ∂D, i punti di accumulazione $\mathcal{D}(D)$, la chiusura $\overline{D}$.*

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

- L'insieme D é costituito da una famiglia di segmenti

$$S_r = \overline{A_r B_r}$$

verticali. essendo r un razionale di $[0,1]$, e $A_r = (r, 0)$, $B_r = (r, 1)$.

I punti di D hanno tutti ascissa x razionale.

Tenuto conto che i razionali di $[0,1]$ sono un insieme numerabile si riconosce che D é unione di una famiglia numerabile di segmenti.

Questo non vuol dire che D sia numerabile, anzi essendo ciascun segmento *non numerabile* certamente D é non numerabile D.

- – D non é chiuso: esistono infatti punti quale $Q = (\sqrt{2}/2, 0)$ di accumulazione per D ma non appartenente a D in quanto di ascissa irrazionale.
  – D non é aperto: anzi nessuno dei suoi punti é interno come si riconosce, ad esempio, osservando che se
  $$P = (r, y_0) \in D$$
  allora la successione
  $$\{Q_n = (r - \frac{\sqrt{2}}{n}, y_0)\} \notin D$$
  converge a P.
  – non é compatto perché non é chiuso,
  – non é connesso perché é unione, ad esempio dei due insiemi
  $$\begin{cases} A = \{(r, y) | r \in \mathbb{Q},\ 0 \le r < 1/\sqrt{2}, y \in [0, 1]\} \\ B = \{(r, y) | r \in \mathbb{Q},\ 1/\sqrt{2} < r \le 1, y \in [0, 1]\} \end{cases}$$
  per i quali riesce
  $$D = A \cup B, \quad \overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$$
- – $\overset{\circ}{D} = \emptyset$
  – $\partial D = [0, 1] \times [0, 1]$
  – $\mathcal{D}(D) = [0, 1] \times [0, 1]$
  – $\overline{D} = [0, 1] \times [0, 1]$.

2.3. Esercizio. *Dare un esempio di*

- *una successione di numeri reali che non ha nessuna sottosuccessione convergente;*
- *una successione che non converge a zero, ma per la quale zero é un punto limite;*
- *una successione di numeri reali con esattamente due punti limite distinti;*
- *una successione di numeri reali con esattamente tre punti limite distinti;*
- *una successione di numeri reali i cui punti limite costituiscono l'intero intervallo chiuso* $[0, 1]$.

SOLUZIONE:

- la successione $\{1, 2, 3, 4, ...\}$ non ha nessuna sottosuccessione convergente;
- la successione $\{0, 1, 0, 1, 0, 1, ...\}$ non converge a zero, ma per essa zero é un punto limite;

- la successione $\{0, 1, 0, 1, 0, 1, ...\}$ ha esattamente due punti limite distinti;
- la successione $\{0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, ...\}$ ha esattamente tre punti limite distinti;
- la successione che include tutti i razionali costruita ad esempio con il procedimento diagonale di Cantor[1] contiene come sottosuccessioni qualunque successione di razionali, quindi contiene sottosuccessioni convergenti a qualunque numero reale: quindi i suoi punti limite sono tutti i reali.

2.4. Esercizio. *Dimostrare, o confutare fornendo un contresempio, i seguenti enunciati:*

- *Se una successione di numeri reali non converge allora tutte le sue sottosuccessioni non convergono.*
- *Se una successione di numeri reali ha un solo punto limite, allora converge*
- *Se una successione limitata di numeri reali ha un solo punto limite, allora converge*
- *Se una successione di numeri reali ha piú di un punto limite, allora non é convergente*
- *Se una successione di numeri reali non ha alcun punto limite, allora é divergente*
- *L'insieme dei punti limite di una successione é chiuso*
- *Se una successione di numeri reali é di Cauchy, allora é limitata*
- *Esiste una successione di Cauchy con esattamente due punti limite distinti*
- *Il prodotto di una successione limitata ed una successione che converge a zero, converge a zero.*
- *Il prodotto di una successione limitata ed una successione di Cauchy é di Cauchy*

SOLUZIONE:

- Se una successione di numeri reali non converge allora tutte le sue sottosuccessioni non convergono FALSO

$$\{1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...\}$$

[1]Consideriamo tutte le coppie di interi, senza sopprimere quelle che indicherebbero lo stesso razionale: solo in questo modo é possibile riconoscere che ogni successione di razionali é sottosuccessione di quella indicata...

- Se una successione di numeri reali ha un solo punto limite, allora converge FALSO

$$\{1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 6, 1, 7, 1, 8, 1, ...\}$$

- Se una successione limitata di numeri reali ha un solo punto limite, allora converge VERO

  Sia infatti ξ l'unico punto limite e sia $\{x_{n_k}\}$ una sottosuccessione che converge ad esso: indichiamo con $\{x_{m_h}\}$ la successione ottenuta dalla prima cancellando i termini della sottosuccessione convergente a ξ.

  Anche la $\{x_{m_h}\}$ in quanto limitata deve ammettere sottosuccessioni convergenti: due casi sono possibili o esse convergono tutte anch'esse a ξ, e allora vuol dire che tutta la successione converge a ξ oppure qualcuna di esse converge a qualche altro punto e quindi avremmo piú di un punto limite come invece assunto per ipotesi.

  Ne segue quindi che riesce, necessariamente

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$$

- Se una successione di numeri reali ha più di un punto limite, allora non é convergente VERO

  Infatti se una successione é convergente tali sono, con lo stesso limite, tutte le sue sottosuccessioni: cioé le successioni convergenti hanno un solo punto limite.
- Se una successione di numeri reali non ha alcun punto limite, allora é divergente FALSO Basta osservare la successione

$$-1,\ 2, -3,\ 4,\ -5, ...\{(-1)^n\, n\}$$

  che non ha alcuna sottosuccessione convergente e quindi non ha punti limite: ma non é divergente cioé non riesce né $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\, n = +\infty$ né $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\, n = -\infty$.

  Si noti tuttavia che il non avere punti limite implica che $\lim_{n\to\infty} |(-1)^n\, n| = +\infty$
- L'insieme dei punti limite di una successione é chiuso VERO Sia $\{y_m\}$ una successione di punti limite della successione convergenti a ξ : allora anche ξ é un punto limite.

  Infatti sia $\{x_n^{[1]}\}$ una sottosuccessione che converga a y_1, sia $\{x_n^{[2]}\}$ una sottosuccessione che converga a y_2, ecc.

  La sottosuccessione

$$x_1^{[1]},\ x_2^{[2]},\ x_3^{[3]},\ x_4^{[4]},\ ....$$

converge a ξ che pertanto é riconosciuto come punto limite.

- Se una successione di numeri reali é di Cauchy, allora é limitata VERO
- Esiste una successione di Cauchy con esattamente due punti limite distinti FALSO

  É noto infatti che se una sottosuccessione di una successione di Cauchy converge a un numero ℓ allora converge ad ℓ ogni altra sottosuccessione.
- Il prodotto di una successione limitata ed una successione che converge a zero, converge a zero. VERO
- Il prodotto di una successione limitata ed una successione di Cauchy é di Cauchy FALSO

$$\{a_n\} = \{1, -1, 1, -1, 1, -1, ...\}, \quad \{b_n\} = \{1, 1, 1, 1, 1, ...\}$$

la prima é limitata, la seconda é di Cauchy.

Osservato che $\{a_n b_n\} = \{a_n\}$ il contresempio é ottenuto.

2.5. Esercizio. *Sia $\{x_n\}$ una successione tale che*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad x_n < \ell \quad e \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \ell$$

. Dimostrare che esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ monotona crescente convergente ad ℓ.

Soluzione:

Prendiamo come primo termine della sottosuccessione monotona crescente che intendiamo costruire x_1 stesso. Certamente esiste $n_2 > 1$ tale che

$$x_1 < x_{n_2} < \ell$$

infatti se un tale n_2 non esistesse vorrebbe dire che i termini della successione dal secondo in poi stanno tutti sotto $x_1 < \ell$ contrariamente all'ipotesi che $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$

Il procedimento si itera, con le stesse giustificazioni, nella determinazione di $n_3 > n_2$ in cui riesca

$$x_1 < x_{n_2} < x_{n_3} < \ell$$

ecc. ecc.

La sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ cosí costruita

- é monotona crescente, $x_{n_k} < x_{n_{k+1}}$
- é limitata superiormente $x_{n_k} < \ell$
- pertanto é convergente,
- in quanto sottosuccessione della $\{x_n\}$ convergente ad ℓ non puó che convergere anch'essa ad ℓ

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \ell$$

2.6. Esercizio. *Data una successione $\{x_n\}$ a termini positivi, dimostrare che o x_n diverge a $+\infty$, oppure esiste una sottosuccessione convergente.*

SOLUZIONE:

Negare che x_n diverga a $+\infty$ vuol dire negare che per ogni M esista n_M tale che

$$\forall n \geq n_m : \quad M \leq x_n$$

Questo significa che esiste $M > 0$ in relazione al quale esistono infiniti n_k per i quali riesce $x_{n_k} < M$: ma allora per il teorema di Bolzano Weierstrass esiste una sottosuccessione convergente.

2.7. Esercizio. *Calcolare i punti limite, il massimo e il minimo limite delle seguenti successioni*

$$x_n = \frac{1 + (\cos(n\pi)n}{1+n} \qquad x_n = n\,\mathrm{e}^{(-1)^{n+1}n}$$

$$x_n = \sqrt[2n+1]{-n} \qquad x_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n^n}$$

$$x_n = \sqrt[n]{n!} \qquad x_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

SOLUZIONE:

PRIMA SUCCESSIONE

$$x_n = \frac{1 + (\cos(n\pi)n}{1+n}$$

Considerato che

$$\cos(n\pi) = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \textit{se} \quad n \quad \textit{pari} \\ -1 & \textit{se} \quad n \quad \textit{dispari} \end{cases}$$

e che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2n}{1+2n} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1-(2n-1)}{1+(2n-1)} = -1$$

si riconosce che le uniche sottosuccessioni convergenti sono quelle che hanno o tutti i termini, tranne un numero finito, con n pari oppure tutti i termini, tranne un numero finito, con n dispari.
Le prime convergono a 1, le altre a -1, che sono, pertanto gli unici punti limite.

Una sottosuccessione che includa infiniti indici pari e infiniti indici dispari non é convergente.

$\boxed{\text{Seconda successione}}$

$$x_n = n\,\mathrm{e}^{(-1)^{n+1}n}$$

Analogamente al caso precedente si riconosce che

$$x_{2n} = 2n\mathrm{e}^{-2n}, \qquad x_{2n-1} = (2n-1)\mathrm{e}^{2n-1}$$

la sottosuccessione dei termini di indice pari, x_{2n} é infinitesima, quella dei termini di indice dispari x_{2n-1} é divergente.
Pertanto solo le sottosuccessioni che contengono solo un numero finito di termini di indice dispari sono convergente e hanno, quindi, limite zero.
Pertanto 0 é l'unico punto limite.

$\boxed{\text{Terza successione}}$

$$x_n = \sqrt[2n+1]{-n}$$

Si tratta di una successione convergente a -1: pertanto -1 é l'unico punto limite.

$\boxed{\text{Quarta successione}}$

$$x_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n^n}$$

Si tratta di una successione convergente a 0: pertanto 0 é l'unico punto limite.

$\boxed{\text{Quinta successione}}$

$$x_n = \sqrt[n]{n!}$$

La successione é divergente: infatti, tenuto conto che

$$\forall M > 0 : \quad \lim_{n\to\infty} \frac{M^n}{n!} = 0$$

ne segue che

$$\rightarrow \quad \exists n_M : \forall n \geq n_M \quad M^n \leq n! \quad \rightarrow \quad M \leq \sqrt[n]{n!}$$

In quanto divergente la successione $x_n = \sqrt[n]{n!}$ non ha punti limite.

$\boxed{\text{Sesta successione}}$

$$x_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

Tenuto presente che

$$\frac{x_{n+1}^{n+1}}{x_n^n} = \frac{(n+1)^{n+1}\, n!}{(n+1)!n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$

pertanto esiste n_0 tale che

$$\forall n \geq n_0 : \quad (e-\varepsilon)\, x_n^n \leq x_{n+1}^{n+1} \leq (e+\varepsilon)\, x_n^n$$

da cui iterando a partire da tale soglia n_0 si ricava

$$(e-\varepsilon)^p\, x_{n_0}^{n_0} \leq x_{n_0+p}^{n_0+p} \leq (e+\varepsilon)^p\, x_{n_0}^{n_0}$$

ovvero, estraendo la radice

$$(e-\varepsilon)^{\frac{p}{n_0+p}}\, x_{n_0}^{\frac{n_0}{n_0+p}} \leq x_{n_0+p} \leq (e+\varepsilon)^{\frac{p}{n_0+p}}\, x_{n_0}^{\frac{n_0}{n_0+p}}$$

Passando al limite per $p \to \infty$ si ottiene

$$(e-\varepsilon) \leq \liminf x_{n_0+p} \leq \limsup x_{n_0+p} \leq (e+\varepsilon)$$

da cui, stante l'arbitrarietá di ε si riconosce che

$$\lim_{n\to\infty} x_n = e$$

Pertanto la successione convergente $x_n = \sqrt[n]{n!}$ ha un unico punto limite, e.

2.8. Esercizio. *Dimostrare che*

- $\limsup\limits_{n\to+\infty}(-x_n) = -\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n$*;*
- $\limsup\limits_{n\to+\infty}(x_n+y_n) \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} x_n + \limsup\limits_{n\to+\infty} y_n$*;*
- $\liminf\limits_{n\to+\infty}(x_n+y_n) \geq \liminf\limits_{n\to+\infty} x_n + \liminf\limits_{n\to+\infty} y_n$*;*
- *se* $\{x_n\}$ *é convergente, allora*

$$\limsup_{n\to+\infty}(x_n+y_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n + \limsup_{n\to+\infty} y_n$$

Dimostrare con degli esempi che le disuguaglianze possono essere strette.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

- $$\Lambda_k = \sup\{-x_k, -x_{k+1}, ...\} = -\inf\{x_k, x_{k+1}, ...\} = -\lambda_k$$

  da cui $\limsup\limits_{n\to+\infty}(-x_n) = -\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n$

- $$\sup\{x_k+y_k, x_{k+1}+y_{k+1}, ...\} \leq \sup\{x_k, x_{k+1}, ...\} + \sup\{y_k, y_{k+1}, ...\}$$
  $$\to \quad \limsup\{x_1+y_1, x_2+y_2, ...\} \leq \limsup\{x_1, x_2, ...\} + \limsup\{y_1, y_2, ...\}$$
- $$\inf\{x_k+y_k, x_{k+1}+y_{k+1}, ...\} \geq \inf\{x_k, x_{k+1}, ...\} + \inf\{y_k, y_{k+1}, ...\}$$
  $$\to \quad \liminf\{x_1+y_1, x_2+y_2, ...\} \geq \liminf\{x_1, x_2, ...\} + \liminf\{y_1, y_2, ...\}$$
- Tenuto conto che $\{x_n\}$ é convergente, supponiamo ad ℓ

2.9. Esercizio. *Data una successione x_n a termini positivi, dimostrare che se*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell \quad \textit{allora} \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = \ell$$

SOLUZIONE:

La dimostrazione di un risultato anche piú ampio di quello dell'esercizio si trova su Rudin, Teorema 3.37, pag.65.
Siano α e β due qualsiasi numeri tali che

$$\alpha < \ell < \beta$$

Allora esiste n_0 tale che

$$\forall n \geq n_0 : \quad \alpha \leq \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \beta$$

ovvero

$$\forall p \geq 0 : \quad \alpha\, x_{n_0+p} \leq x_{n_0+p+1} \leq \beta\, x_{n_0+p}$$

ovvero, iterando tali disuguaglianze,

$$\alpha^p\, x_{n_0} \leq x_{n_0+p+1} \leq \beta^p\, x_{n_0}$$

ovvero ancora, posto $m = n_0 + p + 1$ si ha

$$\alpha^m \alpha^{-n_0-1}\, x_{n_0} \leq x_m \leq \beta^m \beta^{-n_0-1}\, x_{n_0}$$

ovvero ancora indicati con A e B i due fattori si ha

$$A\,\alpha^m \leq x_m \leq B\beta^m$$

da cui

$$\sqrt[m]{A}\,\alpha \leq \sqrt[m]{x_m} \leq \sqrt[m]{B}\,\beta$$

.
Le disuguaglianze riconosciute per $\sqrt[m]{x_m}$ implicano, passando al limite su m e ricordando che

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{A} = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{B} = 1$$

che
$$\alpha \leq \liminf \sqrt[m]{x_m} \leq \limsup \sqrt[m]{x_m} \leq \beta$$
L'arbitrarietá di α e β implicano quindi, scegliendoli sempre piú vicini a ℓ
$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{x_m} = \ell$$

2.10. Esercizio. *Assegnato il numero complesso $w = 4 + 3i$ consideriamo le successioni di numeri complessi*
$$z_n = \frac{w^n}{|w|^n}, \qquad \zeta_n = \frac{w^n}{1 + w^n}$$

- *esaminare se le successioni $\{z_n\}$ e $\{\zeta_n\}$ siano o meno limitate,*
- *esaminare se sono successioni di Cauchy,*
- *determinare per entrambe i punti limite.*

SOLUZIONE:

La successione $\{z_n\}$

Indicato il numero complesso w in forma polare
$$w = |w|(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta))$$
riesce
$$z_n = \frac{|w|^n(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta))^n}{|w|^n} = (\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta))^n$$
espressione che si gestisce meglio servendosi della rappresentazione come esponenziale complesso
$$z_n = e^{in\vartheta}$$
Si riconosce che

- $|z_n| = 1$ da cui la successione $\{z_n\}$ é limitata,
- $|z_n - z_{n+1}| = |e^{in\vartheta} - e^{i(n+1)\vartheta}| = |e^{in\vartheta}||1 - e^{i\vartheta}| = |1 - e^{i\vartheta}|$ Ne deriva che essendo $1 - e^{i\vartheta} \neq 0$ la successione $\{z_n\}$ non é convergente e quindi neanche di Cauchy.
- Essendo $\{z^n\}$ un insieme limitato o é finito o ha almeno un punto di accumulazione:
  - se é finito allora i suoi punti sono tutti punti limite,
  - se non é finito ogni suo punto di accumulazione é punto limite.
- Si puó riconoscere che l'angolo ϑ non é razionale[2] e che quindi $\{z^n\}$ non é finito. Si puó riconoscere anche che l'insieme

[2]Si puó infatti riconoscere che non sono razionali, cioé $\vartheta \neq \frac{p}{q}\pi$ gli angoli acuti dei triangoli rettangoli a lati interi

dei punti limite della $\{z_n\}$ é tutta la circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

$\boxed{\text{La successione } \{\zeta_n\}}$

Tenuto presente che $w \neq 0 \quad \rightarrow \quad w^n \neq 0$ si ha

$$\zeta_n = \frac{w^n}{1 + w^n} = \frac{1}{\dfrac{1}{w^n} + 1}$$

Tenuto presente inoltre che $|w| = 5$ riesce

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{w^n} = 0$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{w^n} + 1) = 1$$

da cui ancora

$$\lim_{n\to\infty} \zeta_n = 1$$

da cui si conclude che la $\{\zeta_n\}$ é limitata, é di Cauchy, ha un solo punto limite, 1.