ANALISI MATEMATICA I

Soluzioni Scritto

25 gennaio 2011

4.1. Esercizio. *Data la funzione*

$$F(x) = \int_0^{x^2} \frac{\sin t - 2}{1+t^2}\, dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- *esaminare se esiste* $\lim_{x\to\pm\infty} F(x)$,
- *determinare il* $\max_{x\in\mathbb{R}} F(x)$.

SOLUZIONE:

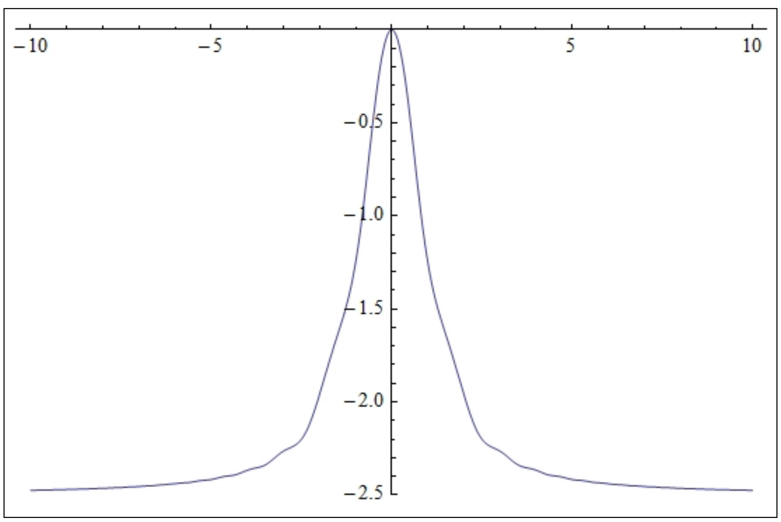

FIGURA 1. $F(x) = \int_0^{x^2} \frac{\sin t - 2}{1+t^2}\, dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Tenuto presente che la funzione integranda soddisfa la disuguaglianza

$$\left| \frac{\sin(t) - 2}{1+t^2} \right| \leq \frac{3}{1+t^2}$$

e tenuto presente che la funzione a secondo membro é dotata di integrale improprio su $[0, +\infty)$ se ne deduce che esiste

$$\lim_{x\to\pm\infty} \int_0^{x^2} \frac{\sin t - 2}{1+t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t - 2}{1+t^2}\, dt$$

Tenuto presente che l'espressione a numeratore verifica la disuguaglianza

$$\sin(t) - 2 \leq -1$$

si riconosce che la funzione integranda é negativa per ogni t e quindi $\forall x \in \mathbb{R} : F(x) \leq 0$.
Tenuto presente che $F(0) = 0$ se ne conclude, vedi Figura 2, che

$$\max_{x \in \mathbb{R}} F(x) = 0$$

4.2. Esercizio. *Si considerino gli insiemi del piano*

$$E_n = \begin{cases} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right\} & \text{per } n \text{ pari} \\ \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right\} & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

- *dire se gli E_n sono, al variare di n, aperti, chiusi, compatti;*
- *dire se l'unione $\cup_{n=0}^{\infty} E_n$ di tutti gli E_n sia aperta, chiusa, compatta;*
- *dire se l'intersezione $\cap_{n=0}^{\infty} E_n$ di tutti gli E_n sia aperta, chiusa, compatta.*

Soluzione:

Gli insiemi E_n assegnati sono, alternativamente, cerchi chiusi e quadrati aperti: quindi la risposta al primo quesito é naturalmente un NO generale.
Si puó comunque precisare che

- gli E_{2m}, quelli cioé di indice pari, sono chiusi e limitati, quindi compatti,
- mentre gli E_{2m+1}, quelli cioé di indice dispari, sono aperti e limitati, quindi non compatti.

L'evidente carattere decrescente

$$E_0 \supset E_2 \supset E_4 \supset \ldots \quad E_1 \supset E_3 \supset E_5 \supset \ldots$$

e il fatto che

$$E_1 \subset E_0$$

implica che

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n = E_0$$

e quindi che l'unione di tutti gli E_n é un insieme chiuso e limitato, quindi compatto.

É evidente che

$$\bigcap_{m=0}^{\infty} E_{2m} = (0,0)$$

Tenuto presente che

$$\forall m : \ (0,0) \in E_{2m+1}$$

si ha anche

$$(0,0) \in \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n \subseteq \bigcap_{m=0}^{\infty} E_{2m} = (0,0)$$

e quindi anche l'intersezione di tutti gli E_n, il solo punto origine, é un insieme chiuso e limitato, quindi compatto.

4.3. Esercizio. *Data la successione di funzioni*

$$f_n(x) = \frac{n\,x}{1+n^p x^2}\,, \qquad x \geq 0$$

studiarne la convergenza puntuale e uniforme al variare dell'esponente $p \geq 1$.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

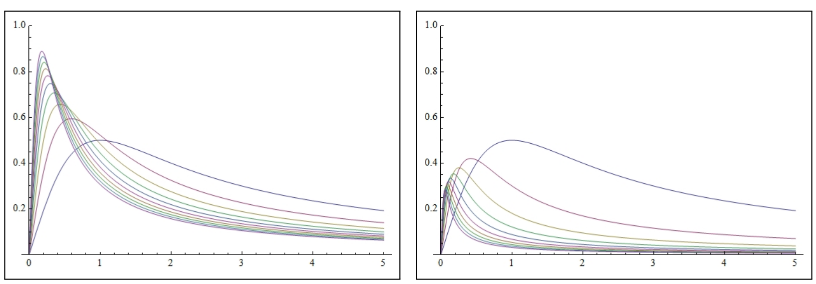

Figura 2. La successione $f_n(x)$ per $p = 1.5$ a sinistra e $p = 2.5$ a destra.

Tutte le funzioni della successione valgono 0 per $x = 0$: quindi, qualunque sia p la successione $\{f_n(x)\}$ converge in $x = 0$ a 0.
Consideriamo gli $x \neq 0$:

$$f_n(x) = \frac{x}{1/n + n^{p-1}x^2} : \qquad \begin{cases} p = 1 & \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1/x \\ p > 1 & \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \end{cases}$$

Quindi la successione assegnata converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$.

Tenuto presente che se $p = 1$ la funzione limite é discontinua si riconosce intanto che per $p = 1$ la convergenza della successione non é uniforme.

Tenuto presente che

$$f_n'(x) = n\,\frac{1 - n^p x^2}{(1 + n^p x^2)^2}$$

si riconosce che le $f_n(x)$ hanno il massimo nel punto

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^p}}$$

il minimo e il massimo in $x \geq 0$ sono quindi, rispettivamente,

$$m_n = 0, \quad M_n = \frac{1}{2} n^{1-p/2}$$

Tenuto presente che se $1 - p/2 \geq 0$ i massimi M_n calcolati non sono infinitesimi si riconosce che per $p \leq 2$ la convergenza della successione non é uniforme.

Per $p > 2$ la convergenza della successione é uniforme.

4.4. Esercizio. *Data l'equazione differenziale*

$$y'' + y = \cos x$$

- *determinare le soluzioni;*
- *determinare se esistono soluzioni verificanti*

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$$

SOLUZIONE:

Le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono

$$y_0(x) = A\,\cos(x) + B\,\sin(x)$$

Una soluzione dell'equazione completa si cerca nella forma

$$\overline{y}(x) = \alpha\,x\,\cos(x) + \beta\,x\,\cos(x)$$

sostituendo si riconosce la funzione

$$\overline{y}(x) = \frac{1}{2} x \sin(x)$$

Tutte le soluzioni dell'equazione assegnata sono pertanto

$$y(x) = A\,\cos(x) + B\,\sin(x) + \frac{1}{2} x \sin(x)$$

Si tratta di funzioni che offrono oscillazioni positive e negative di ampiezze via via maggiori: pertanto nessuna di esse puó avere limite all'infinito.