ANALISI MATEMATICA I

Soluzioni Foglio 3

26 marzo 2009

3.1. Esercizio. *Servendosi dell'espressione della somma delle serie geometriche si determinino le somme delle seguenti serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\rho^k - \rho^{3k}\right), \quad \sum_{k=0}^{\infty} (1-\rho)^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{2k}$$

essendo $\rho \in [0,1)$.

SOLUZIONE:

$$\forall \rho \in [0,1): \ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\rho^k - \rho^{3k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k - \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{3k} = \frac{1}{1-\rho} - \frac{1}{(1-\rho^3}$$

$$\forall \rho \in (0,1): \ \sum_{k=0}^{\infty} (1-\rho)^k = \frac{1}{1-(1-\rho)} = \frac{1}{\rho}$$

$$\forall \rho \in (0,1): \ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{2k} = \frac{1}{1-\left(\dfrac{1}{1+\rho}\right)^2} = \frac{1+\rho+\rho^2}{\rho^2+2\rho}$$

3.2. Esercizio. *Assegnata la serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{h=0}^{\infty} (-\rho)^h\right)^k, \qquad \rho \in [0,1)$$

- *si scrivano esplicitamente gli addendi,*
- *si riconosca che danno luogo a una serie convergente,*
- *se ne calcoli la somma*

SOLUZIONE:

Tenuto conto della nota espressione della somma della serie geometrica si ha

$$\forall \rho \in [0,1): \ \sum_{h=0}^{\infty} (-\rho)^h = \frac{1}{1+\rho} \quad \to \quad \left(\sum_{h=0}^{\infty} (-\rho)^h\right)^k = \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^k$$

Quindi

$$\forall \rho \in (0,1): \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{h=0}^{\infty} (-\rho)^h \right)^k, \quad \rho \in [0,1) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho} \right)^k = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{1+\rho}}$$

Si noti l'esclusione di $\rho = 0$ nell'ultima espressione.

3.3. Esercizio. *Riconoscere, servendosi di un criterio di convergenza assoluta, che le serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\rho^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k^2\rho^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k^3\rho^k$$

sono convergenti qualunque sia $\rho \in [0,1)$.

SOLUZIONE:

Il criterio di convergenza assoluta piú semplice da applicare, e pertanto il primo da utilizzare sempre, é il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell < 1 \quad \to \quad \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$$

e quindi la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ é convergente.

$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} k\rho^k}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)|\rho|^{n+1}}{n|\rho|^n} = |\rho|$$

pertanto c'é convergenza assoluta (e quindi anche convergenza) $\forall \rho \in (-1,1)$.

$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} k^2\rho^k}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2|\rho|^{n+1}}{n^2|\rho|^n} = |\rho|$$

pertanto c'é convergenza assoluta (e quindi anche convergenza) $\forall \rho \in (-1,1)$.

$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} k^3\rho^k}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3|\rho|^{n+1}}{n^3|\rho|^n} = |\rho|$$

pertanto c'é convergenza assoluta (e quindi anche convergenza) $\forall \rho \in (-1, 1)$.

Osservazione 3.1. *É evidente che il conto (ripetitivamente) fatto tre volte fa naturalmente capire che sono assolutamente convergenti* $\forall \rho \in (-1, 1)$ *tutte le serie* $\sum_{k=0}^{\infty} k^n \rho^k$ *qualunque sia l'esponente* n *scelto (anche, a maggior ragione, intero negativo, prescindendo, in tal caso, dall'addendo per* $k = 0$*).*
La convergenza $\forall \rho \in (-1, 1)$ *delle serie* $\sum_{k=0}^{\infty} k^n \rho^k$ *implica, naturalmente, il carattere infinitesimo della successione degli addendi*

$$\lim_{k\to\infty} k^n \rho^k = 0$$

collegata al fatto che, nel prodotto dei fattori k^n *divergenti per quelli* ρ^k *infinitesimi siano, qualunque sia l'esponente* n *assunto, questi ultimi a prevalere.*

3.4. Esercizio. *Determinare per quali* $\rho \geq 0$ *la serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{1+k^2}$$

é convergente.

SOLUZIONE:

Il confronto

$$\left| \frac{\rho^k}{1+k^2} \right| \leq |\rho|^k$$

conduce a riconoscere la convergenza assoluta, e quindi la convergenza, della serie assegnata $\forall \rho \in (-1, 1)$.
Consideriamo ora i $\rho \notin (-1, 1)$:

- servendosi del rapporto si riconosce che

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left| \dfrac{\rho^{k+1}}{1+(k+1)^2} \right|}{\left| \dfrac{\rho^k}{1+k^2} \right|} = |\rho|$$

e pertanto si riconosce che se $|\rho| > 1$ la successione degli addendi della serie non é infinitesima e quindi la serie non puó convergere.

- Restano da studiare i due casi $\rho = 1$ e $\rho = -1$: in entrambi i casi il confronto

$$\left|\frac{\rho^k}{1+k^2}\right| \leq \frac{1}{k^2}$$

con la serie armonica generalizzata convergente permette di riconoscere la convergenza assoluta, e quindi la convergenza, della serie assegnata.

Riassumendo:
la serie é convergente $\forall \rho \in [-1, 1]$ e non é convergente per $\rho \notin [-1, 1]$.

3.5. Esercizio. *Riconoscere la convergenza, o meno, della serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-n+n^2}{1+n^4}$$

SOLUZIONE:

Tenuto conto che $\forall n \geq 1 : \ |1-n| \leq n^2$ riesce

$$\forall n \geq 1 : \ \left|\frac{1-n+n^2}{1+n^4}\right| \leq \frac{2n^2}{1+n^4} \leq \frac{2}{n^2}$$

si riconosce, per confronto, che la serie assegnata é assolutamente convergente.

3.6. Esercizio. *Assegnata la serie*

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{2^k}$$

- *riconoscere, per confronto, che é convergente,*
- *indicare una maggiorazione per la somma,*
- *determinare n_0 tale che la somma parziale di ordine n_0 differisca dalla somma della serie per meno di* 0.01.

SOLUZIONE:

Consideriamo il rapporto

$$\frac{\left|\dfrac{2(k+1)-1}{2^{k+1}}\right|}{\left|\dfrac{2k-1}{2^k}\right|}=\frac{1}{2}\frac{2k+1}{2k-1}$$

Tenuto conto che

$$\forall k\geq 1:\quad \frac{2k+1}{2k-1}\leq\frac{3}{2}$$

si ha

$$\frac{\left|\dfrac{2(k+1)-1}{2^{k+1}}\right|}{\left|\dfrac{2k-1}{2^k}\right|}\leq\frac{3}{4}\quad\to\quad\left|\frac{2(k+1)-1}{2^{k+1}}\right|\leq\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^k$$

e quindi la convergenza, riconosciuta per confronto con una serie geometrica di ragione 3/4.
Dalla maggiorazione riconosciuta deriva anche la maggiorazione per la somma:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k-1}{2^k}\right|\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^k=\frac{1}{2}\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=\frac{3}{2}$$

Dette

$$S_m=\sum_{k=1}^{m}\frac{2k-1}{2^k}$$

le somme parziali ed S la somma della serie riesce

$$S-S_m=\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{2k-1}{2^k}\leq\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^k=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{m+1}\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=2\left(\frac{3}{4}\right)^{m+1}$$

Per decidere quale somma parziale S_m differisca da S per meno di 0.01 basterá scegliere il primo m per cui riesca

$$2\left(\frac{3}{4}\right)^{m+1}\leq\frac{1}{100}$$

Basta provare qualche potenza (anche a mano) per riconoscere che $m=14$ dovrebbe bastare...!

3.7. Esercizio. *Assegnata la serie*

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$$

- *riconoscere, per confronto, che é convergente,*
- *determinare una espressione esplicita per le somme parziali,*
- *calcolare la somma.*

SOLUZIONE:

Tenuto conto che

$$\frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{(k+1)^2}$$

e tenuto conto che la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ é convergente, si riconosce che la serie assegnata é convergente.
Tenuto conto che

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

si riconosce per le somme parziali una notevole proprietá di semplificazione:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{1.2} \\
S_2 &= \frac{1}{1.2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) &&= 1-\frac{1}{3} \\
S_3 &= \frac{1}{1.2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) &&= 1-\frac{1}{4} \\
&....
\end{aligned}$$

da cui si riconosce che

$$S_n = 1-\frac{1}{n+1}$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

3.8. Esercizio. *Assegnata la serie*

$$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5^3}+...+\frac{1}{k}-\frac{1}{5^k}+..=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{5^k}\right)$$

- *esaminare se si tratta di una serie convergente,*
- *esaminare se essa rientri nelle ipotesi del Teorema 3.42 sulle serie a termini di segno alterno,*

- *cercare quale (diversa) alternanza dei segni produrrebbe una serie convergente.*

SOLUZIONE:

Tenuto presente che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ non é convergente e invece la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k}$ lo é, la serie assegnata, differenza delle due, non puó essere convergente.
La serie assegnata non rientra nelle Ipotesi del Teorema 3.42 sulle serie a termini di segno alterno: tale teorema richiede infatti che i termini, presi in modulo (cioé non avvalendosi dell'alternanza dei segni) costituiscano una successione decrescente a zero.
Nel nostro caso i moduli dei termini hanno limite zero ma non costituiscono una successione decrescente.
Un'alternanza dei segni applicata solo ai termini della forma $\frac{1}{k}$ avrebbe condotto ad una serie convergente (non assolutamente):

$$1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{(-1)^k}{k} - \frac{1}{5^k} + .. = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{k} - \frac{1}{5^k} \right)$$

3.9. Esercizio. *Determinare la serie prodotto*

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \frac{1}{2^n} + \dots \right)^2$$

- *riconoscere che si ottiene una serie convergente,*
- *riconoscere che la somma della serie prodotto é il quadrato della somma della serie assegnata.*

SOLUZIONE:

La serie prodotto richiesta ha addendi

$$c_n = \sum_{h=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^h \left(\frac{1}{2}\right)^{n-h} = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Avendo riconosciuto, in un precedente esercizio che le serie

$$\forall \rho \in [0, 1) : \quad \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^n$$

erano convergenti si riconosce la convergenza della serie prodotto ottenuta

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Il teorema sulle serie prodotto di due serie assolutamente convergenti prova che la serie prodotto ha come somma il prodotto delle due somme, quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)^2 = 4$$

Osservazione 3.2. *Che la serie* $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ *abbia una somma maggiore di quella della serie* $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ *era prevedibile: che abbia somma esattamente il doppio di quella non é un fatto banale.*
Lo incontreremo altre volte occupandoci, successivamente di serie di funzioni e delle loro derivate.

3.10. Esercizio. *Assegnate le due serie geometriche*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty}(-\rho)^k$$

- *determinare la serie prodotto delle due,*
- *determinare la serie prodotto della precedente per la*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-\rho^2)^k$$

SOLUZIONE:

Siano $\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty}(-\rho)^k$ le due serie da moltiplicare: l'espressione degli addendi della serie prodotto é la seguente

$$c_n = \sum_{h=0}^{n}\rho^{n-h}(-\rho^h) = \rho^n\sum_{h=0}^{n}(-1)^h = \begin{cases} \rho^n & \textit{se} \quad n \quad \textit{pari}, \\ 0 & \textit{se} \quad n \quad \textit{dispari} \end{cases}$$

Pertanto la serie prodotto é la seguente

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho^{2k} = \frac{1}{1-\rho^2}$$

La somma é, ovviamente, il prodotto delle due somme delle serie fattori

$$\frac{1}{1-\rho}, \qquad \frac{1}{1+\rho}$$

Un procedimento analogo permette di riconoscere, posto ρ^2 al posto di ρ che

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \rho^{2k}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-\rho^2)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{4k}$$

3.11. Esercizio. *Data una successione an positiva e infinitesima, dimostrare che esiste una sottosuccessione $\{b_k = a_{n_k}\}$ tale che la serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

sia convergente.

SOLUZIONE:

Dal momento che, per ipotesi,

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

esisterá un indice n_1 tale che $a_{n_1} \leq \frac{1}{2}$.
Esisterá poi un primo indice n_2, successivo a n_1 tale che $a_{n_2} \leq \frac{1}{2^2}$.
Cosí proseguendo si determina una sottosuccessione

$$\{a_{n_h}\} \subset \{a_k\}$$

che, per confronto con la

$$\left\{\frac{1}{2^h}\right\}$$

riesce convergente.

3.12. Esercizio. *Discutere la convergenza delle seguenti serie al variare di $x \in \mathbb{R}$:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} Exp\left(\frac{-n^2 x}{n+x^2}\right)$$

SOLUZIONE:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}}$$

Servendosi del criterio del rapporto si ha

$$\frac{\dfrac{(n+1)!|x|^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!|x|^n}{n^n}} = \frac{|x|}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} \to \frac{|x|}{e}$$

Convergenza assoluta per $|x| < e$.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} Exp\left(\frac{-n^2 x}{n+x^2}\right)}$$

Considerato che

$$Exp\left(\frac{-n^2 x}{n+x^2}\right) = \left(e^{\dfrac{-nx}{n+x^2}}\right)^n$$

e considerato che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-nx}{n+x^2} = x$$

si riconosce che riesce definitivamente

$$\left(e^{\dfrac{-nx}{n+x^2}}\right) < 1$$

per $x > 0$.

Pertanto la serie assegnata é assolutamente convergente per $x > 0$.

3.13. Esercizio. *Stabilire per quali α reali convergono le serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\alpha}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\log(n)^{\alpha}}$$

SOLUZIONE:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\tfrac{1}{n}\right)^{\alpha}}$$

Considerato che $|\sin(x)| \leq |x|$ riesce

$$\left|\sin\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}\right| \leq \frac{1}{n^{\alpha}}$$

da cui, per confronto, la convergenza assoluta per $\alpha > 1$.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)^{\alpha}}$$

Considerato che $|1 - \cos(x)| \leq \frac{|x|^2}{2}$ riesce

$$\left|\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\alpha}\right| \leq \frac{1}{2\, n^{2\alpha}}$$

da cui, per confronto, la convergenza assoluta per $2\alpha > 1$.

$$\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\log(n)^{\alpha}}}$$

Stessa maggiorazione precedente

$$\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\log(n)^{\alpha}}\right| \leq \frac{1}{n^{\alpha}}$$

da cui la convergenza assoluta per $\alpha > 1$.

3.14. Esercizio. *Stabilire per quali numeri complessi z convergono le serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n,$$

SOLUZIONE:

$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} z^n}$

Si tratta di una serie geometrica: convergenza se e solo se $|z| < 1$.

$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} n z^n}$

Criterio del rapporto

$$\frac{(n+1)|z|^{n+1}}{n|z|^n} = |z| \frac{n+1}{n} \to |z|$$

da cui ancora convergenza se e solo se $|z| < 1$.

$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}}$

Analogamente: convergenza se e solo se $|z| < 1$.

$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n}$

Criterio del rapporto

$$\frac{(n+1)!|z|^{n+1}}{n!|z|^n} = |z|(n+1)$$

convergenza se e solo se $z = 0$.